Exercices sur la trigonométrie (2)

> Cosinus et sinus d'angles associés

Pour les exercices suivants, on s'aidera d'une lecture du cercle trigonométrique, notamment des valeurs remarquables.

Exercice n°1

a. $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{-\pi}{6}$

b. $x = -\dfrac{\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6}$

c. $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = -\dfrac{3\pi}{4}$

Exercice n°2

1. Si $x \in \left] -\pi\,;\,\pi \right[$:

   a. $x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6}$

   b. $x = -\dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

   c. $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{4}$

2. Si $x \in \left[0\,;\,2\pi \right[$:

   a. $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{11\pi}{6}$

   b. $x = \dfrac{7\pi}{6}$ ou $x = -\dfrac{11\pi}{6}$

   c. $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{4}$

Exercice n°3

a. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{\pi}{4} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

b $\cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\pi + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c. $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad x = \dfrac{2\pi}{3} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

d. $\sin(x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{6} + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{5\pi}{6} + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

e. $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k \times 2\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi + k \times 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Exercice n°4

a. $2\cos(x) \times (\sin(x) + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2\cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = -1$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi) \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi) \quad \text{ou} \quad x = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$

b. $(3\sin(x)+6)(\cos(x)+1)=0$

$\Leftrightarrow$ $3\sin(x)+6=0$ ou $\cos(x)+1=0$

$\Leftrightarrow$ $\sin(x)=-2$ ou $\cos(x)=-1$

$\Leftrightarrow$ impossible ou $x=\pi\ (2\pi)$ ou $x=-\pi\ (2\pi)$

c. $2\sin(x)^2-1=0$

$\Leftrightarrow$ $\sin(x)^2=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow$ $\sin(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Leftrightarrow$ $x=\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$ ou $x=\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ et $x=-\dfrac{\pi}{4}\ (2\pi)$ $x=-\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

Exercice n°5

1. On pose $X=\cos(x)$. L'équation devient alors : $2X^2+7X-4=0$.
   $\Delta=7^2-4\times2\times(-4)=81$. $\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes :
   $$X_1=\frac{-7-\sqrt{81}}{2\times2}=-4 \quad \text{et} \quad X_2=\frac{-7+\sqrt{81}}{2\times2}=\frac{1}{2}$$
   Les solutions de cette équation d'inconnue X sont donc -4 et $\dfrac{1}{2}$.

2. Puisque $X=\cos(x)$ on a $\cos(x)=-4$ et $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$. Puisque $-1\leqslant\cos(x)\leqslant1$, la première équation n'admet pas de solution.
   Pour $\cos(x)=\dfrac{1}{2}$ les solutions sont $x=\dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$ et $x=-\dfrac{\pi}{3}\ (2\pi)$.

Exercice n°6

a. $4\sin(x)^2+4\sin(x)+1=0$. On pose $X=\sin(x)$. L'équation devient :

$4X^2+4X+1=0$. $\Delta=4^2-4\times4\times1=0$. L'équation admet une unique solution : $X=-\dfrac{-4}{2\times4}=\dfrac{1}{2}$.

Puisque $X=\sin(x)$ la solution de l'équation devient $\sin(x)=\dfrac{1}{2}$ ce qui donne $x=\dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}\ (2\pi)$.

b. $2\cos(x)^2-\cos(x)-1=0$. On pose $X=\cos(x)$. L'équation devient :

$2X^2-X-1=0$. $\Delta=(-1)^2-4\times2\times(-1)=9$. Puisque $\Delta>0$, l'équation admet deux solutions distinctes :

$$X_1=\frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\times2}=-\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad X_2=\frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\times2}=1.$$

Puisque $X=\cos(x)$ les solutions deviennent $\cos(x)=-\dfrac{1}{2}$ et $\cos(x)=1$ ce qui est équivalent à $x=\dfrac{3\pi}{4}\ (2\pi)$ ou $x=-\dfrac{3\pi}{4}$ et $x=0\ (2\pi)$.

> Simplifier des expressions

Exercice n°7

a. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=0$

b. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

$=-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

d. $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}-0$

$=\frac{1}{2}$

Exercice n°8

a. $\sin\left(\frac{125\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{124\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+62\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+31\times 2\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

b. $\cos\left(\frac{55\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{54\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+18\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

c. $\sin\left(\frac{-95\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{96\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-24\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $\sin\left(\frac{25\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{24\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+6\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

Exercice n°9

a. $\cos(x+\pi)+\cos(\pi-x)=-\cos(x)-\cos(x)=-2\cos(x)$

b. $\sin(-x)-\sin(\pi+x)=-\sin(x)-(-\sin(x))=0$

c. $\cos(x+\pi)+\cos(\pi-x)-2\cos(-x)=-\cos(x)-\cos(x)-2\cos(x)=-4\cos(x)$

Exercice n°10

a. $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\pi-x)-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(x)-\cos(x)-\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=-(-\cos(x))=\cos(x)$

b. $\sin(x+\pi)+\sin(x-\pi)-2\sin(-x)=-\sin(x)+\sin(-(\pi-x))-2\times(-\sin(x))=-\sin(x)-\sin(x)+2\sin(x)=0$

c. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(3\pi-x)-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin(x)+\sin(\pi-x)-\cos\left(-\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\right)=-\sin(x)+\sin(x)-\sin(x)$
$=-\sin(x)$

> Déduire l'un quand on connaît l'autre

Exercice n°11

Pour tout réel x on sait que $\cos(x)^2+\sin(x)^2=1$. En particulier, pour $x=\dfrac{\pi}{5}$ on a : $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^2\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^2=1$.

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2+\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^2=1$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^2=1-\dfrac{6+2\sqrt{5}}{16}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^2=\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$ ou $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=-\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$

Exercice n°12

1. Pour tout réel x on sait que $\cos(x)^2+\sin(x)^2=1$.

   Ici : $\cos(x)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2=1\Leftrightarrow\cos(x)^2+\dfrac{8-4\sqrt{3}}{16}=1\Leftrightarrow\cos(x)^2=1-\dfrac{8-4\sqrt{3}}{16}\Leftrightarrow\cos(x)^2=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

   $\cos(x)=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$ et $\cos(x)=-\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$ soit environ 0,96 et environ $-0,96$.

2. On sait que $\sin(x)$ est négatif. On cherche donc un réel x qui se trouve entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et 0. On élimine donc $\dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{5\pi}{12}$.
   On sait ensuite que $\cos(x)$ est environ égal à 0,96 ou $-0,96$. Or, si $x=\dfrac{-5\pi}{12}$, on aura un $\cos(x)$ plus proche du 0,25 (en plaçant sur le cercle trigonométrique).
   La seule possibilité est donc que x soit égal à $\dfrac{\pi}{5}$.

> Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Exercice n°13

La courbe représentative de la fonction f admet une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées. f est donc une fonction paire.
En regardant la courbe représentative, on remarque une répétition des morceaux de courbe tous les $\dfrac{\pi}{2}$. C'est donc une fonction $\dfrac{\pi}{2}-$périodique.

Exercice n°14

La courbe représentative de la fonction f admet une symétrie par rapport à l'origine du repère. C'est donc une fonction impaire.
En regardant la courbe représentative, on remarque une répétition des morceaux de courbe tous les $\frac{\pi}{2}$. C'est donc une fonction $\frac{\pi}{2}-$périodique.

Exercice n°15

1. $f(-x) = \sin(-x)\cos(-x) = -\sin(x)\cos(x) = -f(x)$.
   f est donc une fonction impaire.

2. $f(x+\pi) = \sin(\pi+x)\cos(x+\pi) = -\sin(x) \times (-\cos(x)) = \sin(x)\cos(x) = f(x)$.
   f est donc bien $\pi-$périodique.

Exercice n°16

1. $f(-x) = 2\cos(-2 \times (-x)) = 2\cos(2x) = f(x)$ car $\cos(-x) = \cos(x)$. La fonction f est donc paire.

2. $f(x+\pi) = 2\cos(-2 \times (x+\pi)) = 2\cos(-2x-2\pi) = 2\cos(-2x) = f(x)$. La fonction f est donc bien $\pi-$périodique.

Exercice n°17

1. $f(-x) = \sin(2 \times (-x)) = \sin(-2x) = -\sin(2x) = -f(x)$. La fonction f est donc impaire.

2. $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin(2x+\pi) = -\sin(2x)$.
   La fonction f n'est donc pas $\frac{\pi}{2}-$périodique.