# Les suites numériques

## 1 Définitions générales

**Définitions**

On appelle **suite numérique** une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang $n_0$.
L'image d'un entier naturel $n$ est noté $u(n)$ ou bien $u_n$. Dans ce cas, $n$ est appelé **l'indice** ou le **rang** du terme $u_n$.
La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement $(u_n)$.

**Exemple** On considère la suite $(u_n)$ des nombres entiers impairs. Le premier terme de cette suite est 1. On note alors $u_0 = 1$. Le suivant est 3 : on va noter $u_1 = 3$.
Ainsi, les premiers termes de la suite $(u_n)$ sont donc $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$ et ainsi de suite.

**Définition : suite définie par une formule explicite**

Soit $p$ un entier naturel.
On dit qu'une suite est définie par une **formule explicite** si pour tout entier naturel $n \geqslant p$ on a $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction définie sur $[\ p\,;\,+\infty\ [$.

**Remarque** Pour déterminer le terme de rang $n$ d'une telle suite, il suffit de calculer l'image de $n$ par la fonction $f$.

**Exemple** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n = (n+1)^2$.
Pour calculer les termes de cette suite, on va remplacer $n$ par des valeurs d'entiers naturels.
$u_3 = (3+1)^2 = 16$. Pour calculer le terme de rang 7 : $u_7 = (7+1)^2 = 64$. Et ainsi de suite.

**Définition : suite définie par une relation de récurrence**

Soit $p$ un entier naturel.
Une suite $(u_n)$ est définie par **récurrence** lorsque l'on donne la valeur du terme initial $u_p$ et un procédé qui permet de calculer un terme à partir du précédent. Ce procédé est appelé **relation de récurrence**.

**Exemple** Prenons la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = 2u_n - 4$.
On a alors : $u_1 = 2 \times u_0 - 4 = 2 \times 1 - 4 = -2$
Puis : $u_2 = 2 \times u_1 - 4 = 2 \times (-2) - 4 = -8$
Puis : $u_3 = 2 \times u_2 - 4 = 2 \times (-8) - 4 = -12$
Et ainsi de suite

## 2 Représentation graphique d'une suite numérique

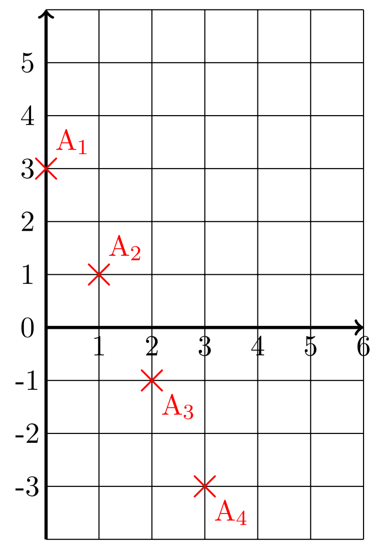
**Définition**

La représentation graphique d'une suite numérique est formée de l'ensemble des points de coordonnées ( $n\,;u_n$ ) avec les valeurs de $n$ pour lesquelles la suite est définie. On parle de **nuage de points**.

**Exemple**

Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -2n+3$. Sa représentation graphique est le nuage des points de coordonnées ( $n\,;u_n$).

D'après l'expression littérale de la suite, $u_0 = 3$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$, $u_3 = -3$. Cela donne donc les points de coordonnées $A_0(0\,;3)$, $A_1(1\,;1)$, $A_2(2\,;-1)$ et $A_3(3\,;-3)$.




## 3 Sens de variation d'une suite numérique

**Définitions**

Soit $(u_n)$ une suite définie sur $\mathbb{N}$ et soit $p$ un entier naturel.

- La suite $(u_n)$ est **croissante** à partir du rang $p$ si pour pour tout entier naturel $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- La suite $(u_n)$ est **décroissante** à partir du rang $p$ si pour pour tout entier naturel $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- La suite $(u_n)$ est **monotone** à partir du rang $p$ si elle est soit croissante soit décroissante à partir du rang $p$.
- La suite $(u_n)$ est **constante** à partir du rang $p$ si pour pour tout entier naturel $n \geqslant p$ on a $u_{n+1} = u_n$.

**Remarque** Lorsque l'on remplace les inégalités larges ($\leqslant$ ou $\geqslant$) par des inégalités strictes ($<$ ou $>$) on parle de suite strictement croissante ou strictement décroissante.

**Méthode : étude de variation dans le cas général**

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de la différence de deux termes consécutifs quelconque :

- si pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, alors la suite $(u_n)$ est croissante à partir du rang $p$.
- si pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, alors la suite $(u_n)$ est croissante à partir du rang $p$.
- si pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, alors $(u_n)$ est croissante à partir du rang $p$.
- si pour tout entier naturel $n \geqslant p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, alors $(u_n)$ est croissante à partir du rang $p$.

**Méthode : étude de variation dans le cas d'une suite définie de façon explicite**

Soit $(u_n)$ une suite définie pour tout entier naturel $n \geqslant p$ par $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction définie sur $[\, p\,; +\infty\, [$.

- Si $f$ est (strictement) croissante sur $[\, p\,; +\infty\, [$ alors $(u_n)$ est (strictement) croissante à partir du rang $p$.
- Si $f$ est (strictement) décroissante sur $[\, p\,; +\infty\, [$ alors $(u_n)$ est (strictement) décroissante à partir du rang $p$.

**Démonstration** On se place dans le cas où $f$ est croissante sur $[\, p : +\infty\, [$.

Pour tout entier $n \geqslant p$, on a $n+1 \geqslant n$.
Puisque $f$ est croissante on a alors $f(n+1) \geqslant f(n)$.
Par définition, $u_n = f(n)$ et donc $u_{n+1} = f(n+1)$. On a alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et $(u_n)$ est donc croissante sur $[\, p\,; +\infty\, [$.

Le cas où $f$ est décroissante se montre de la même façon.

# 4 Notion de limite

**Premières approches**

Le but est d'observer le comportement des termes d'une suite quand $n$ devient extrêmement grand, quand $n$ tend vers $+\infty$. On parle de **limite** de la suite $u_n$.

**Exemple**

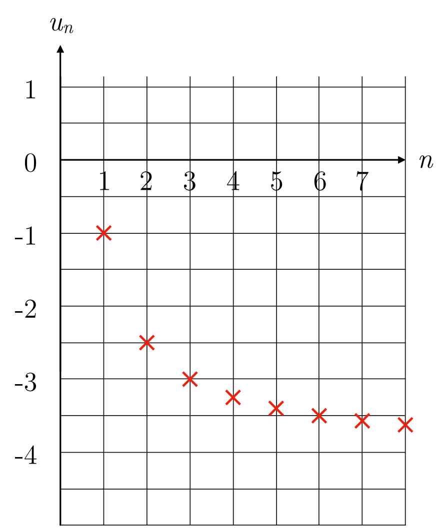
Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{-4n+3}{n}$.

On donne ci-contre la représentation graphique de cette suite.

Plus $n$ devient grand, plus il semble que les termes $u_n$ se rapproche de la valeur $-4$.

On peut donc supposer que la limite de $u_n$ est $-4$.

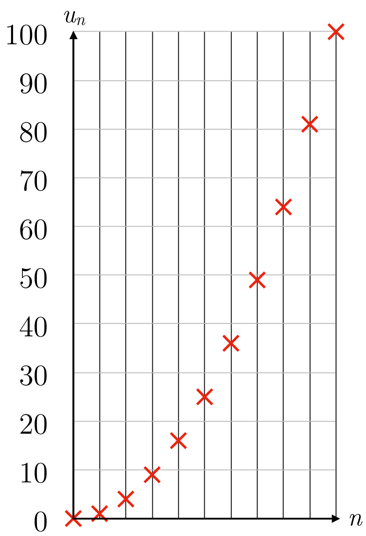
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -4$ et on dit que la suite $(u_n)$ est convergente ou bien encore que $u_n$ converge vers $-4$.

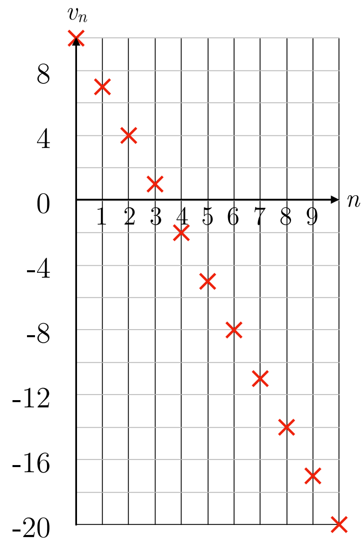


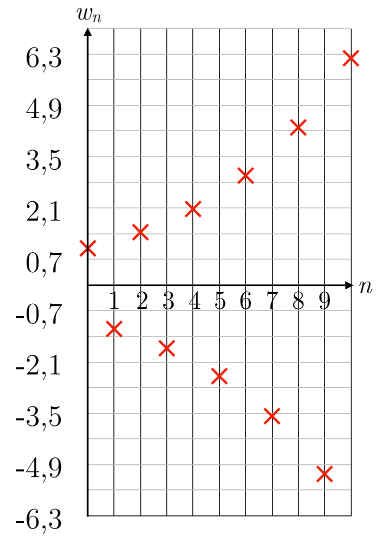

**Définition**

Quand une suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente**.

### Exemples




La suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2$ semble avoir des termes qui deviennent de plus en plus grands. On peut donc supposer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. On dit aussi que $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

La suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 10 - 3n$ semble avoir des termes qui deviennent de plus en plus petits. On peut donc supposer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$. On dit aussi que $(v_n)$ diverge vers $-\infty$.

La suite $(w_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = (-1,2)^n$ ne semble ni converger vers un réel, ni tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$.
On peut donc supposer que $(w_n)$ diverge et n'a pas de limite.