

Suites arithmétiques et géométriques

> Les suites arithmétiques

Exercice n°1 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 7$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Donner le sens de variation de cette suite.
3. Représenter, par un nuage de points, les cinq premiers termes de la suite (u_n) .

Exercice n°2 On considère une suite arithmétique (u_n) de raison 10 et de premier terme -1 .

1. Déterminer les quatre premiers termes de cette suite.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n .

Exercice n°3 Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $u_n = 3n + 2$.

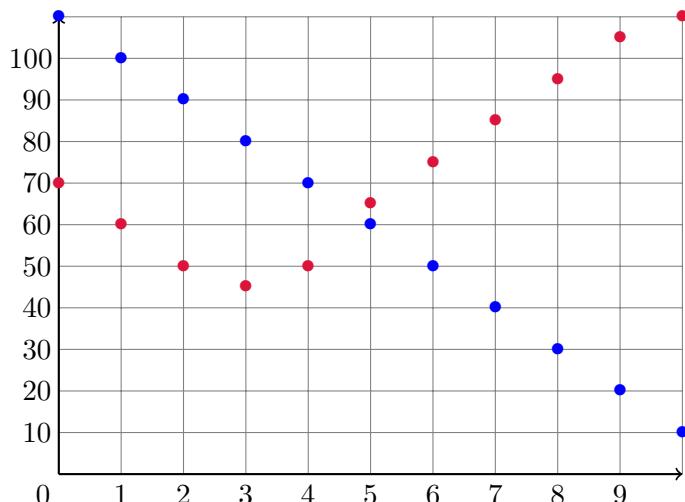
1. Calculer u_0 , u_1 et u_2 .
2. Quelle semble-tre la nature de la suite (u_n) ?
3. Calculer $u_{n+1} - u_n$ et prouver le résultat de la question précédente.

Exercice n°4

On considère les deux représentations graphiques ci-contre.

La représentation graphique bleue est celle d'une suite (v_n) et la rouge est celle d'une suite (w_n) .

1. Déterminer graphiquement v_0 , v_1 , v_2 .
2. Déterminer graphiquement w_0 , w_1 , w_2 .
3. Laquelle de ces représentations est celle d'une suite arithmétique ?
4. Donner la valeur du premier terme et la raison de cette suite arithmétique et en déduire ses variations.



Exercice n°5

1. Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'elle est, ou n'est pas, arithmétique.
 - a. $u_n = 7 - 4n$
 - b. $v_n = n^2 - 1$
 - c. $w_n = (n + 1)^2 - n^2$
2. Pour les suites arithmétiques trouvées à la question précédente, donner la raison, le premier terme et déterminer ses variations sur \mathbb{N} .

> Les suites géométriques

Exercice n°6 Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = v_n \times 2$.

1. Déterminer v_1 , v_2 et v_3 .
2. Voici un extrait de tableur qui permet de générer les premiers termes de la suite (v_n) . Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 avant d'être étirée vers le bas ?
3. À l'aide du tableur, quelles semblent être les variations de la suite (v_n) ?
4. Prouver ce résultat.
5. Répondre à cette question à l'aide d'un tableur : à partir de quelle valeur de n le terme v_n est-il supérieur à 1 000 ?

	A	B
1	n	v_n
2	0	3
3	1	6
4	2	12
5	3	24
6	4	48
7	5	96
8	6	192
9	7	384

Exercice n°7 On considère la suite géométrique (v_n) de premier terme -2 et de raison 5 .

1. Déterminer les quatre premiers termes de cette suite.
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel n .
3. Donner les variations de la suite (v_n) sur \mathbb{N} .

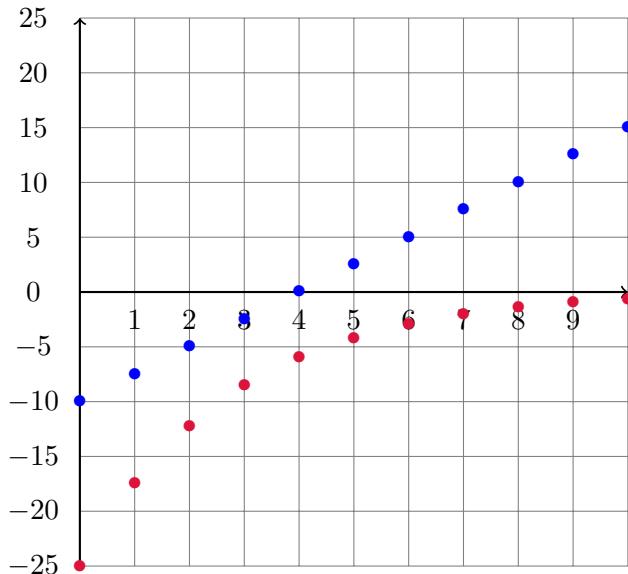
Exercice n°8 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 6$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. La suite (u_n) est-elle géométrique ?
3. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$. Calculer u_0 , u_1 , u_2 .
4. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Pour cela, on pourra exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
5. Donner les variations de la suite (v_n) sur \mathbb{N} .

Exercice n°9

On considère deux suites (u_n) et (v_n) respectivement représentée graphiquement en bleu et en rouge sur le repère ci-contre.

1. Lire graphiquement les valeurs de u_0 et v_0 .
2. Quelles semblent être les variations des deux suites ?
3. Laquelle des suites semble arithmétique ? Et géométrique ?
4. Pour la suite arithmétique, donner sa raison. En déduire ses variations sur \mathbb{N} .
5. La suite géométrique a pour raison $\frac{7}{10}$. Calculer la valeur exacte du deuxième et troisième terme de cette suite.
6. Donner les variations de la suite géométrique sur \mathbb{N} .



Exercice n°10

1. Pour chacune des suites ci-dessous dont on donne le terme général, montrer qu'elle est, ou n'est pas, géométrique.
- a. $u_n = -\frac{2}{5^n}$
- b. $v_n = \frac{2^{2n}}{3^{3n}}$
- c. $w_{n+1} = -w_n + 3$ et $w_0 = -4$
2. Pour les suites géométriques trouvées à la question précédente, donner la raison, le premier terme et déterminer ses variations sur \mathbb{N} .

> Utiliser les suites pour modéliser

Exercice n°11

Jean-Kevin place 150€ sur un compte épargne rémunéré au taux mensuel de 0,4% à intérêts simples. Ainsi, chaque mois, le capital acquis augmente de 0,4% du capital initial.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le capital acquis, en euros, au bout de n mois.

1. Déterminer u_0 puis u_1 .
2. Pour tout n dans \mathbb{N} , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) .

Jean-Kevin décide d'utiliser un tableur pour effectuer les calculs plus rapidement.

On en donne un extrait ci-contre.

3. Quelle formule doit-il saisir dans la cellule B3 pour ensuite l'étirer vers la droite ?
4. Répondre aux questions suivantes à l'aide d'un tableur :
 - (a) Quel est le capital acquis par Jean-Kevin au bout de 1 an ?
 - (b) Au bout de combien de mois aura-t-il dépassé les 200€ sur son livret ?

	A	B
1	n	u_n
2	0	150
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	

Exercice n°12

Jean-Kevin décide de placer 1 800€ sur un compte épargne rémunéré au taux annuel de 2,25% à intérêt composé. Ainsi, chaque année, le capital augmente de 2,25% par rapport au capital de l'année précédente.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le capital, en euros, acquis au bout de n années.

1. Déterminer u_0 puis u_1 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) .
3. Pour effectuer les calculs plus rapidement, Jean-Kevin décide d'utiliser le programme Python suivant :

```

1 def Placement(n):
2     u=1800
3     for i in range(n):
4         u=1.0225*u
5     return(u)

```

Quelle sera la somme sur le livret de Jean-Kevin au bout de 5 ans ? et au bout de 10 ans ?

4. Compléter ce programme pour déterminer au bout de combien d'années Jean-Kevin aura au moins doublé son capital initial.

Exercice n°13 Jean-Kevin a un salaire de 1 800€ net en 2018.

Son employeur lui propose une augmentation annuelle de 4%. On admet que son taux de recouvrement de l'impôt ne change pas durant les années à venir. On note s_n le salaire annuel de Jean-Kevin pour l'année 2018 + n .

1. (a) Calculer son revenu annuel en 2018.
(b) Calculer s_1 et s_2 .
2. (a) Pour tout entier naturel n , exprimer s_{n+1} en fonction de s_n .
(b) En déduire la nature de la suite (s_n) et sa raison.
(c) Calculer le salaire annuel prévu en 2022.
3. Déterminer le pourcentage d'évolution prévu pour le salaire de Jean-Kevin de 2018 à 2022.

Exercice n°14

On administre un médicament à un patient. On a constaté que la concentration de ce médicament dans le sang est de 1 g/L au bout de la première heure et qu'elle diminue de 9% par heure.

1. Modéliser cette situation par une suite que l'on nommera (c_n) . Préciser sa nature, sa raison ainsi que son premier terme.
2. En déduire ses variations sur \mathbb{N} .
3. On estime que ce médicament n'est plus efficace lorsque sa concentration dans le sang devient inférieure à 0,2 g/L. Durant combien de temps le médicament a-t-il été efficace ?
4. À l'aide d'un programme Python ou d'un tableur, déterminer la concentration initiale que l'on doit administrer pour que le médicament fasse effet au bout de 24h. La réponse sera donnée à 0,01 g/L près.

Exercice n°15

Un biologiste étudie l'évolution de la population de singes sur un île. En 2025, il estime qu'il y a 1 000 singes sur cette île.

Partie A : Premier modèle Chaque année, la population de singes baisse de 10%.

1. Montrer qu'en 2026, il y aura 900 singes sur l'île.
2. Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre de singes sur l'île pour l'année 2025 + n .
On a donc $u_0 = 1\ 000$.
 - (a) Indiquer ce que représente u_2 et calculer sa valeur.
 - (b) Déterminer la nature de la suite (u_n) et préciser sa raison.
 - (c) Donner les variations de cette suite.
3. Selon ce modèle, la population de singes est-elle menacée d'extinction ?

Partie B : Second modèle

On admet que l'évolution du nombre de singes est modélisée par la suite (v_n) ainsi définie :

$$\begin{cases} v_{n+1} &= 0,9v_n + 150 \quad ; n \in \mathbb{N} \\ v_0 &= 1\ 000 \end{cases}$$

Quelle formule faut-il saisir en B3 avant de l'étirer vers le bas ?

1. Avec ce modèle, quelle sera la population de singes en 2026 ?
2. La feuille de calcul ci-contre donne les valeurs arrondies à l'unité des premiers termes de (v_n) .

3. Reproduire cette feuille de calcul puis indiquer en quelle année, la population de singes dépassera pour la première fois les 1 400 individus.

	A	B
1	n	v_n
2	0	1 000
3	1	1 050
4	2	1 095