Généralités sur les fonctions

1 Rappels sur le vocabulaire et les différents modes de représentation

Définitions

On appelle **fonction** un procédé qui, à un nombre de départ, fait correspondre un unique nombre.

Une fonction est définie sur un ensemble de nombre que l'on nomme **domaine de définition** de la fonction. Si la fonction est notée f alors son ensemble de définition est noté $\mathcal{D}_f$.

Soit x un nombre de $\mathcal{D}_f$. Le nombre $f(x)$ est appelé l'**image** de x par la fonction f. Le nombre x (le nombre de départ) est appelé **antécédent** de $f(x)$ par la fonction f.

Modes de représentation d'une fonction

- Une fonction f peut être représentée par son **expression littérale**.
  A toute valeur réelle x de son ensemble de définition, on associe le nombre réel $f(x)$.
  On note alors $f : x \mapsto f(x)$.

- Une fonction peut aussi être représentée graphiquement dans un repère par sa courbe d'équation $y = f(x)$.
  Cette **représentation graphique** est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ où $x \in \mathcal{D}_f$.

Exemple

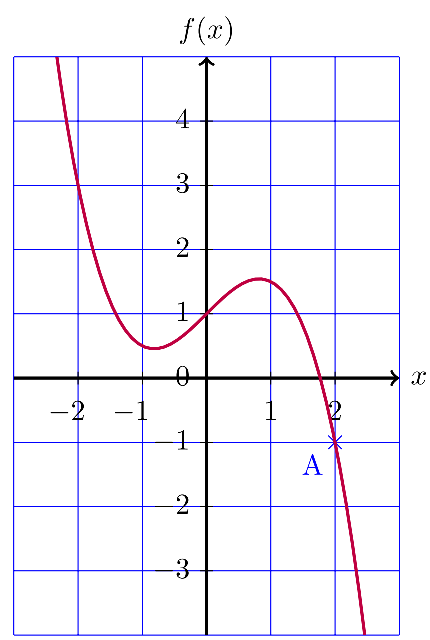
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^3 + x + 1$.
L'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}$.

$f(2) = -\dfrac{1}{2} \times 2^3 + 2 + 1 = -1$; $f(-3) = -\dfrac{1}{2} \times (-3)^3 + (-3) + 1 = \dfrac{23}{2}$

L'image de 2 par la fonction f est -1. On peut aussi dire que 2 est un antécédent de -1 par la fonction f.

L'image de -3 par la fonction f est $\dfrac{23}{2}$. On peut aussi dire que -3 est un antécédent de $\dfrac{23}{2}$ par la fonction f.

Ci-contre, la courbe représentative de la fonction f.
Le point A$(2\,;\,-1)$ permet de visualiser le calcul précédent : c'est un point qui appartient à la courbe représentative de la fonction f.



2 Taux de variation, entre deux valeurs, d'une fonction

Définition : taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux réels distintcs de I.
On appelle **taux de variation** de f entre a et b le réel défini par :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Propriété

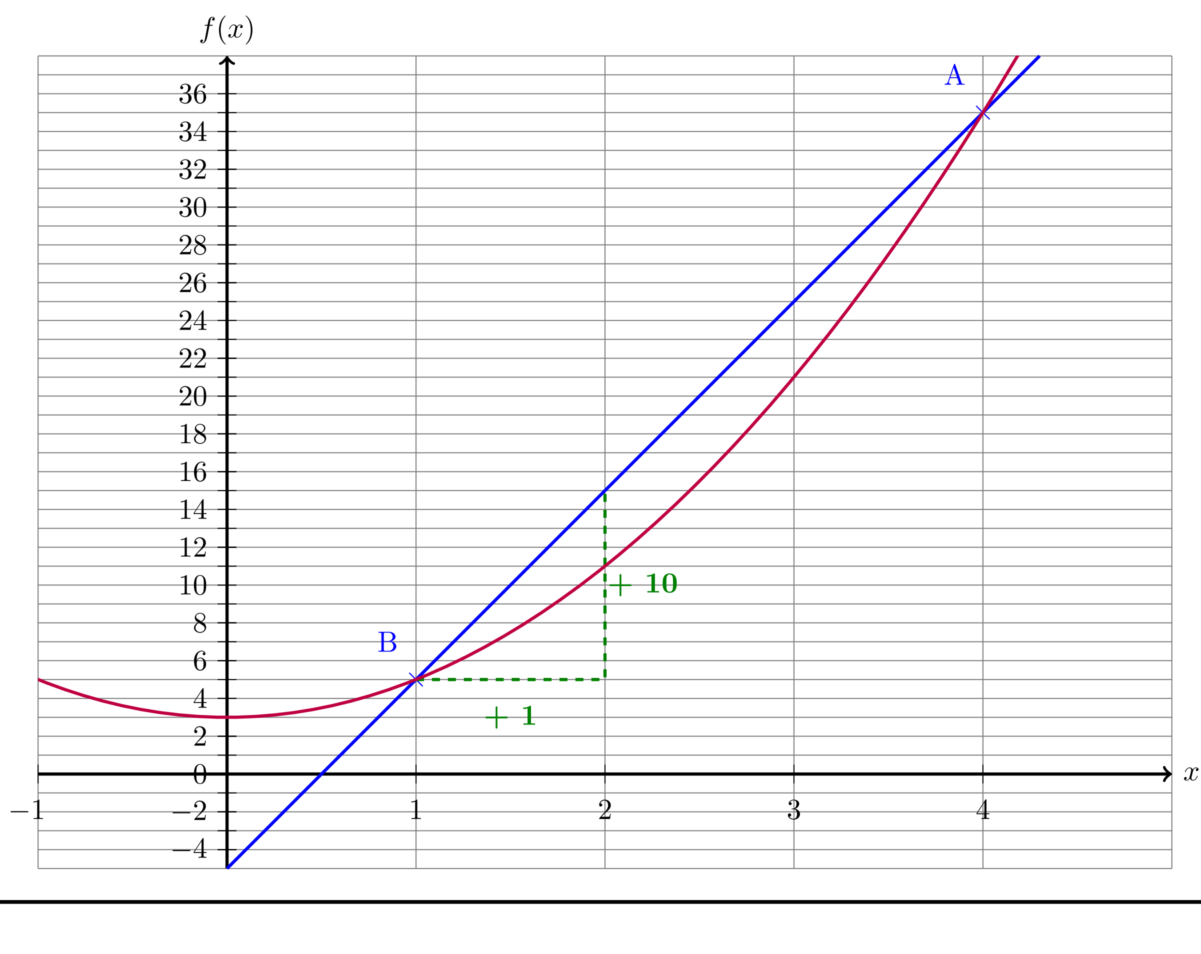
Le taux de variation d'une fonction f entre a et b est le coefficient directeur (ou pente) de la droite passant par $\mathrm{A}(a\,;\,f(a))$ et $\mathrm{B}(b\,;\,f(b))$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+3$. On souhaite déterminer le taux de variation de f entre 4 et 1.

$\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{2\times 4^2+3-(2\times 1^2+3)}{3}=\dfrac{35-5}{3}=10.$

Cela signifie que le coefficient directeur de la droite passant par $\mathrm{A}(4\,;\,35)$ et $\mathrm{B}(1\,;\,5)$ est égal à 10.



Définition : fonction monotone

Soit f une fonction dont le domaine de définition est noté $\mathcal{D}_f$. Soit I un intervalle de $\mathcal{D}_f$.
On dit que f est **(strictement) monotone** sur I si f est :

- soit (strictement) croissante sur I ;
- soit (strictement) décroissante sur I ;
- soit constante sur I ;

Propriétés

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ et soit I un intervalle de $\mathcal{D}_f$. Soient a et b deux réels distincts de I.

- Si le taux de variation $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est (strictement) positif alors f est (strictement) croissante sur I.
- Si le taux de variation $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est (strictement) négatif alors f est (strictement) décroissante sur I.
- Si le taux de variation $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est égal à 0 alors f est constante sur I.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. On veut montrer que f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$.

Soient a et b deux réels distincts de $]-\infty\,;\,0[$.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a} = \frac{\frac{a-b}{ab}}{b-a} = \frac{-(b-a)}{ab(b-a)} = \frac{-1}{ab}$$

Puisque les deux réels a et b sont de même signe, leur produit est positif. Donc le nombre $\dfrac{-1}{ab}$ est négatif.

Le taux de variation de la fonction f entre a et b est donc négatif : f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$.

On peut aussi montrer de la même manière que f est strictement décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$.