Fonctions polynômes de degré 3

1 Représentations graphiques

Définition : polynôme de degré 3

Soient a, b, c et d des nombres réels avec $a \neq 0$.
On appelle **polynôme du troisième degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Exemple

- $x \mapsto 3x^3 - 6x^2 + x - 9$ est un polynôme de degré 3 avec $a = 3$, $b = -6$, $c = 1$ et $d = -9$.
- $x \mapsto x^3 + 2x - 1$ est un polynôme de degré 3 avec $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$ et $d = -1$.
- $x \mapsto 2x^2 - 1$ n'est pas un polynôme de degré 3.

Remarque

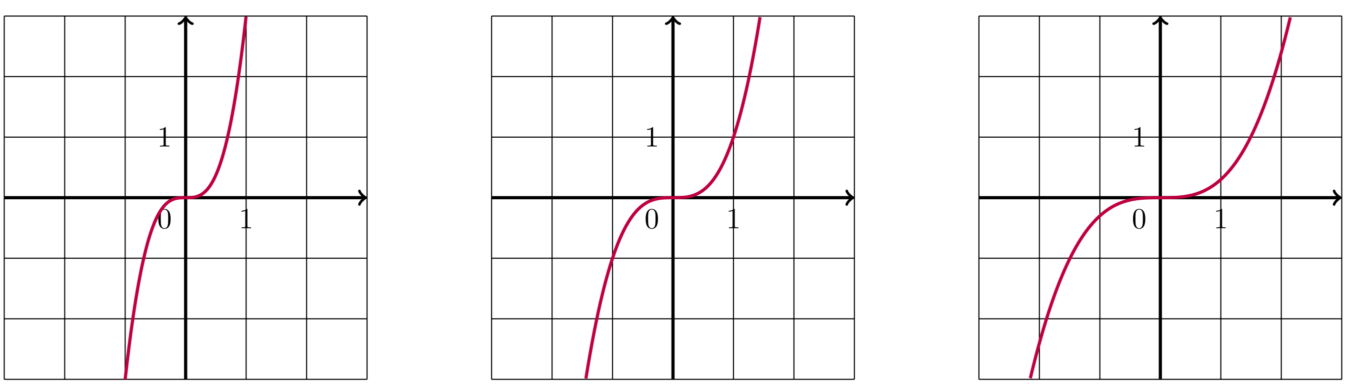
Les fonctions $x \mapsto ax^3$ et $x \mapsto ax^3 + d$ sont des fonctions polynôme de degré 3. Pour la première, c'est un cas particuliers où les coefficients b, c et d sont nuls. Pour la seconde, les coefficients b et c sont nuls.

Propriété

Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ une fonction polynôme de degré 3.

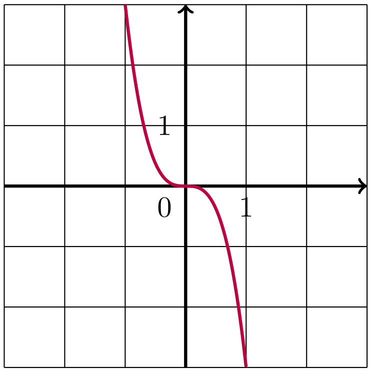
- Si $a > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- Si $a < 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

Exemple : représentations graphiques de quelques fonctions $x \mapsto ax^3$ pour $a > 0$

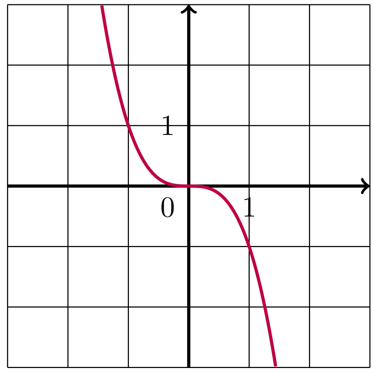


$x \mapsto 3x^3$ — $x \mapsto x^3$ — $x \mapsto \frac{1}{3}x^3$

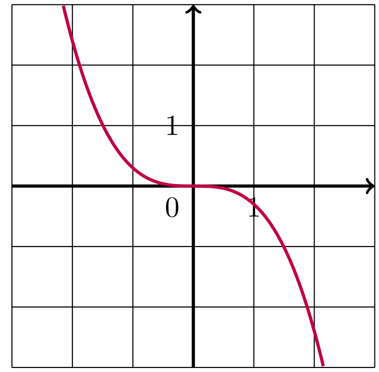
Exemple : représentations graphiques de quelques fonctions $x \mapsto ax^3$ pour $a < 0$



$x \mapsto -3x^3$



$x \mapsto -x^3$

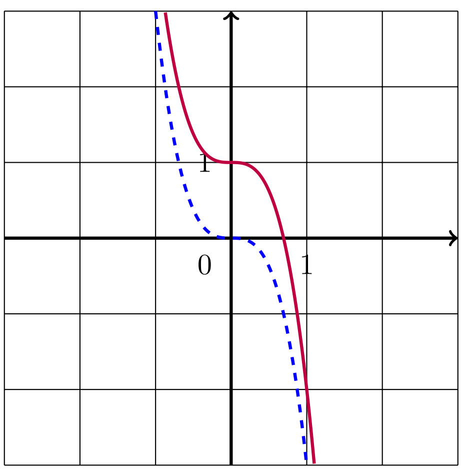


$x \mapsto -\frac{1}{3}x^3$

Propriétés

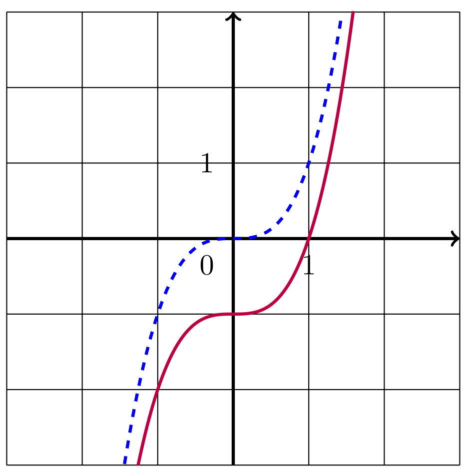
Soit f un polynôme du troisième degré de la forme $ax^3 + d$.
La courbe représentative de f est l' image de la courbe représentative d'équation $y = ax^3$ par la translation de vecteur $(0\,;\,d)$.

Exemple : représentations graphiques de quelques fonctions $x \mapsto ax^3 + d$



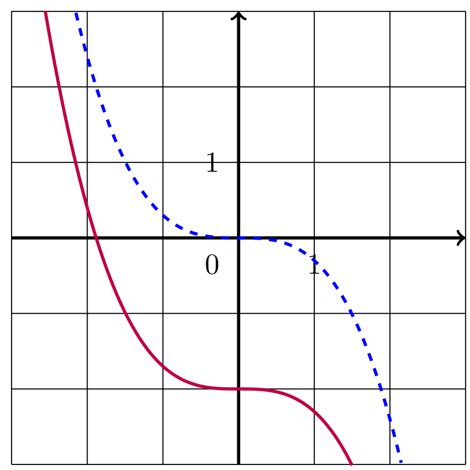
$x \mapsto -3x^3$

$x \mapsto -3x^3 + 1$



$x \mapsto x^3$

$x \mapsto x^3 - 1$



$x \mapsto -\frac{1}{3}x^3$

$x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 - 2$

2 Racines et signe d'un polynôme de degré 3

Propriété - Définition

Soient a, x_1, x_2 et x_3 trois nombres réels avec $a \neq 0$.
la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ est un polynôme du troisième degré.
L'écriture $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ est appelée la **forme factorisée** de cette fonction.

Propriété

Soit f un polynôme de degré 3 dont la forme factorisée est $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ avec x_1, x_2 et x_3 non nécessairement distincts.

L'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions, non nécessairement distinctes : x_1, x_2 et x_3.

Définition

Soit f un polynôme de degré 3 dont la forme factorisée est $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ avec x_1, x_2 et x_3 non nécessairement distincts.
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont appelées les **racines** de f.

Exemple : étudier le signe d'un polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -\dfrac{1}{2}(x + 4)(x - 3)(x + 2)$. On souhaite étudier le signe de ce polynôme sur son ensemble de définition.

(1) On détermine les racines du polynôme. Ici, les racines sont $x_1 = -4$, $x_2 = 3$ et $x_3 = -2$.
(2) On réalise le tableau de signe de la fonction sur son ensemble de définition :

x	$-\infty$		-4		-2		3		$+\infty$
$-\dfrac{1}{2}$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

3 Équation $x^3 = c$

Propriété

Soit c un réel.
L'équation $x^3 = c$ admet une unique solution réel. Cette solution se note $c^{\frac{1}{3}}$ ou encore $\sqrt[3]{c}$.

Définition

Soit c un nombre réel positif.
Le nombre $c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{c}$ est appelé la **racine cubique** de c.

Exemples

- On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5x^3 - 2 = 133$.

$$5x^3 - 2 = 133$$
$$\Leftrightarrow \quad 5x^3 = 135$$
$$\Leftrightarrow \quad x^3 = 27$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{27} = 3$$

La solution de l'équation est donc $x = 3$.

- On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x^3 + 5 = -98$.

$$-2x^3 + 5 = -98$$
$$\Leftrightarrow \quad -2x^3 = -103$$
$$\Leftrightarrow \quad x^3 = \frac{103}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{103}{2}}$$

La solution de l'équation est donc $x = \sqrt[3]{\frac{103}{2}}$.