La proportionnalité

1 Quelques rappels

Définitions

On dit que deux grandeurs sont **proportionnelles** quand les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre différent de 0.
Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple

Dans un magasin, 2,3 kg de tomates sont au prix de 2,76€ et 1,5 kg de ses même tomates coûtent 1,80€.

$2,76 \div 2,3 = 1,2$ et $1,80 \div 1,5 = 1,2$. Les deux quotient sont égaux, il s'agit donc bien d'une situation de proportionnalité.
Pour passer du kg de tomates au prix, on multiplie donc par 1,2 qui est le coefficient de proportionnalité de la situation.

Méthode : quatrième de proportionnelle

Dans une situation de proportionnalité, on peut utiliser la méthode de la **quatrième de proportionnelle** (produit en croix).
C'est un calcul qui permet de trouver une quatrième valeur quand on en connaît trois dans une situation de proportionnalité.

Exemple

Pour entretenir sa piscine, Jean-Kevin doit déposer du produit dans celle-ci. Sur l'étiquette, il est indiqué de déposer 3 mL du produit pour 5 m^3 d'eau. Sachant que le volume de sa piscine est de 62 m^3, quelle est la quantité de produit que Jean-Kevin doit utiliser ?

Il s'agit d'une situation de proportionnalité, on peut donc faire un tableau de proportionnalité.

Volume d'eau (en m^3)	5	62
Volume de produit (en mL)	3	?

$\dfrac{3 \times 62}{5} = 37,2$. Il doit donc verser 37,2 mL de produit dans sa piscine.

Propriétés

- Une situation de proportionnalité peut être représentée par des points tous alignés avec l'origine du repère.
- Inversement, si deux grandeurs sont représentées graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère, alors ces grandeurs sont proportionnelles.

2 Pourcentages

Méthode

Pour déterminer le pourcentage d'une quantité que représente une valeur sur une quantité totale, on divise la valeur par la quantité totale et on multiplie par 100 :

$$\frac{\text{valeur}}{\text{quantité totale}} \times 100$$

Exemple

Jean-Kevin a effectué 25 tirs au buts et a marqué 11 fois lors d'une séance d'entrainement. Quel est son pourcentage de réussite ?

$\dfrac{11}{25} \times 100 = 44$. Il a donc 44% de réussite.

Méthode

Pour appliquer un pourcentage t à une valeur, on multiplie cette valeur par $\dfrac{t}{100}$.

Exemple

Jean-Kevin possède une voiture hybride. Il a roulé pendant 120 km dont 35% en électrique. Pendant combien de km a-t-il roulé en électrique ?

$120 \times \dfrac{35}{100} = 42$. Il a roulé en électrique sur 42 km.

Propriétés

Soit t un nombre positif.

- Augmenter une quantité de t% revient à la multiplier par $1 + \dfrac{t}{100}$.
- Diminuer une quantité de t% revient à la multiplier par $1 - \dfrac{t}{100}$.

Exemples

- Un pull, qui coutait initialement 60€ est en solde à 30%. Quel est son nouveau prix ?

  $60 \times \left(1 - \dfrac{30}{100}\right) = 42$. Le pull coute maintenant 42€.

- Pendant l'hiver, Jean-Kevin a augmenté sa consommation d'électricité de 20%. Il avait l'habitude de consommer 390 kWh par mois. Combien de kWh a-t-il consommé en hiver ?

  $390 \times \left(1 + \dfrac{20}{100}\right) = 468$. Cet hiver, il a consommé 468 kWh par mois.

Remarque

Dans les précédents exemples, il est possible de raccourcir les calculs.

En effet, une diminution de 30% se traduit par une multiplication par 0,7.
Une augmentation de 20% se traduit par une multiplication par 1,2.

3 Notion de ratio

Définition

Soient c et d deux nombres positifs et différents de 0.

On dit que deux nombres positifs a et b sont dans le **ratio** c pour d si $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$. On note alors « $c : d$ ».

Exemple

Un patron souhaite partager une prime de 1 000€ pour deux employés en fonction du nombre d'heures supplémentaires effectuées. Jean a effectué 3 heures supplémentaires et Kevin en a fait 5.

Le patron va donc partager les 1 000€ dans le ratio 3 : 5.
$3 + 5 = 8$.
Pour Jean : $\dfrac{3}{8} \times 1000 = 375$. Pour Kevin : $\dfrac{5}{8} \times 1000 = 625$.

Le patron va donc donner 375€ à Jean et 625€ à Kevin.

Propriété

Si deux grandeurs sont dans un ratio, alors elles sont proportionnelles.

Remarque

Dans ce genre de situation, on peut donc utiliser un tableau de proportionnalité.

Exemple

- Un patron à 2 400€ de prime è donner à trois employés en fonction du temps de travail supplémentaire. Gastonne a réalisé 32h supplémentaires, Roger 30 et Jean-Kevin 38h. Le patron va donc partager selon le ratio 32 : 30 : 38. On appelle g la somme pour Gastonne, r la somme pour Roger et j celle pour Jean-Kevin.

	Gastonne	**Roger**	**Jean-Kevin**	**Total**
Heures de travail	32	30	38	$32+30+38=100$
Somme (en €)	g	r	j	2 400

On utilise le produit en croix : $j=\dfrac{38\times 2400}{100}=912 \quad r=\dfrac{30\times 2400}{100}=720 \quad g=\dfrac{32\times 2400}{100}=768.$

On vérifie que $912+720+768=2400$. Jean-Kevin aura 912€, Roger aura 720€ et Gastonne aura 768€.

- Les écrans de TV respectent le ratio 16 : 9. On note h la hauteur d'un écran dont la largeur fait 3 840 pixels.
Puisque cet écran est dans le ratio 16 : 9, on a : $\dfrac{3840}{16}=\dfrac{h}{9}$ donc $h=\dfrac{3840\times 9}{16}=2160$.