Arithmétique

1 Quelques rappels

Définitions

Prenons deux nombres entiers positifs a et b avec $b \neq 0$.
Effectuer la **division euclidienne** de a par b c'est trouver deux entiers positifs q et r tels que $a = b \times q + r$.
Le nombre q est appelé **quotient** de a par b et le nombre r est appelé **reste de la division euclidienne**.
a est le **dividende** et b est le **diviseur**.

Exemple

Effectuons la division euclidienne de 377 par 12.

$$
\begin{array}{rr|l}
- & 377 & \underline{12} \\
 & \underline{36} & 31 \\
- & 17 & \\
 & \underline{12} & \\
 & 5 &
\end{array}
$$

Le quotient de la division euclidienne de 377 par 12 est 31 et il reste 5.
On peut alors écrire $377 = 12 \times 31 + 5$.

Définitions

On dit que a est **divisible** par b si le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0.
On dit aussi que a est un **multiple** de b ou que b est un **diviseur** de a.

Exemple

Dans le précédent exemple, 377 n'est pas un multiple de 12.
Mais si on pose la division euclidienne de 5 235 par 5, on voit que 5 est un diviseur de 5 235.

Remarque

Pour vérifier si un nombre est un multiple ou un diviseur d'un autre, on peut utiliser les critères de divisibilité pour aller plus vite.

Propriété

(Pour 2) Si le chiffre des unités d'un nombre entier est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8 alors ce nombre est divisible par 2.
(Pour 3) Si la somme des chiffres qui composent un nombre entier est un multiple de 3 alors le nombre est divisible par 3.
(Pour 5) Si le chiffre des unités d'un nombre est 0 ou 5 alors ce nombre est divisible par 5.
(Pour 9) Si la somme des chiffres qui composent un nombre entier est un multiple de 9 alors le nombre est divisible par 9.
(Pour 10) Si le chiffre des unités d'un nombre est 0 alors ce nombre est divisible par 10.

Exemple

Prenons le cas de 4 125.

- Le chiffre des unités n'est pas 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8 donc 4 125 n'est pas divisible par 2.
- $4+1+2+5=12$. Or 12 est un multiple de 3 donc 4 215 aussi.
- Le chiffre des unités de 4 125 est 5 donc il est divisible par 5.
- $4+1+2+5=12$. Or 12 n'est pas un multiple de 9 donc 4 215 non plus.
- Le chiffre des unités de 4 125 n'est pas 0 donc 10 n'est pas un diviseur de 4 125.

2 Les nombres premiers

Définition

Un **nombre premier** est un nombre premier possédant exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemple

Voici la liste des 17 premiers nombres premiers à connaître :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 et 29.

Voici la liste des 100 premiers :

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	81	89	97

Propriété

Tout nombre entier peut se décomposer en produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique (si on ne tient pas compte de l'ordre des facteurs).

Exemple

On veut la décomposition en produit de facteurs premiers de 60.

(1) On divise 60 par le premier nombre premier : 2.
$60 \div 2 = 30$. On aura une fois le **2**.
On recommence : $30 \div 2 = 15$. On aura une deuxième fois le **2**.

(2) On passe maintenant à 3 car 15 n'est pas divisible par 2 mais par 3 oui.
$15 \div 3 = 5$. On aura une fois le **3**.

(3) On passe maintenant à 5 car 5 n'est pas divisible par 3 mais par 5 oui.
$5 \div 5 = 1$. On aura une fois le **5**.

(Fin) On s'arrête car le dernier résultat obtenu est 1. On peut alors écrire : $60 = \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{5}$ ou encore $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.

3 Fraction irréductible

Définition

On se donne deux nombres entiers relatifs a et b avec $b \neq 0$.
On dit que $\frac{a}{b}$ est une **fraction irréductible** si le seul diviseur commun à a et b est 1.
On peut aussi dire qu'une fraction est irréductible quand on ne peut plus la simplifier.

Exemple

- $\frac{12}{20}$ n'est pas une fraction irréductible car on peut la simplifier par 2 ou par 4.
- $\frac{7}{8}$ est une fraction irréductible car le seul diviseur commun à 7 et 8 est 1. On ne peut plus la simplifier.

Méthode : rendre une fraction irréductible

Pour rendre une fractions irréductible, on à deux façons de faire :

Simplifier la fraction en plusieurs étapes jusqu'à ce qu'on ne puisse plus la simplifier.	ou	Décomposer le numérateur et le dénominateur en produit de facteur premier puis simplifier.

Exemple

On va rendre irréductible la fraction $\frac{24}{180}$.

On simplifiant en plusieurs étapes :
$$\begin{aligned}\frac{24}{180} &= \frac{24 \div \mathbf{2}}{180 \div \mathbf{2}}\\ &= \frac{12}{90}\\ &= \frac{12 \div \mathbf{2}}{90 \div \mathbf{2}}\\ &= \frac{6}{45}\\ &= \frac{6 \div \mathbf{3}}{45 \div \mathbf{3}}\\ &= \frac{2}{15}.\end{aligned}$$

A l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers :

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ et $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.

Donc $\frac{24}{180} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \mathbf{2} \times \cancel{3}}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \mathbf{3} \times \mathbf{5}} = \frac{2}{15}$.