Épreuve de Bernoulli

1 Deux épreuves indépendantes

Définition : épreuves indépendantes

On dit que deux épreuves d'une expérience aléatoire sont **indépendantes** si le résultat de l'une ne dépend pas du résultat de l'autre (ou n'influe pas le résultat de l'autre).

Exemple

- On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois de suite un dé cubique non truqué. Les deux lancers sont indépendants. La face obtenue au premier lancer n'aura aucune incidence sur le second lancer.
- Un appareil ménager peut présenter deux types de défaut de façon aléatoire.
  Un défaut visuel (V) et un défaut de fonctionnement (F). Il s'agit de deux évènements indépendants.

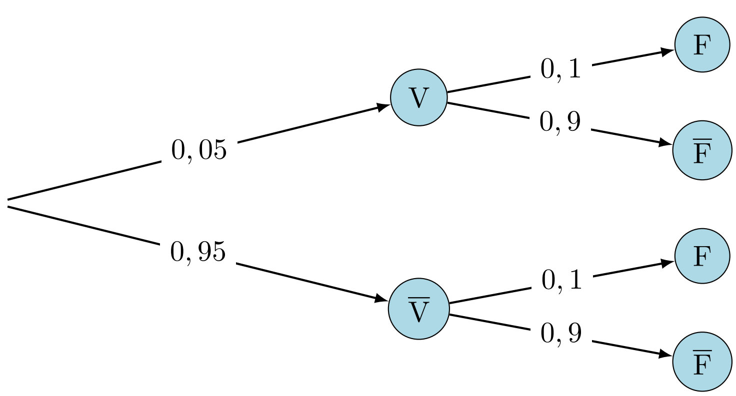
Remarques

Ce genre de situation peut se représenter à l'aide d'un arbre pondéré. Sur chaque branche de l'arbre, on fait apparaître la probabilité de l'évènement.

Les probabilités issues de chaque branche d'un même chemin se multiplient.

Exemple : utiliser un arbre pondéré (début)

Un appareil ménager peut présenter deux types de défaut de façon aléatoire. La probabilité qu'il ait un défaut visuel (V) est de 0,05 et la probabilité qu'il ait un défaut de fonctionnement (F) est de 0,1.
On sélectionne au hasard un de ces appareils ménagers et on veut calculer la probabilité qu'il présente un défaut visuel sans présenter un défaut de fonctionnement.
On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré :



Exemple : utiliser un arbre pondéré (fin)

On chercher $P(\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{F}})$.
Il faut donc regarder le deuxième chemin de l'arbre $P(\mathrm{V} \cap \overline{\mathrm{F}}) = 0,05 \times 0,9 = 0,045$.
La probabilité que l'appareil présente un défaut visuel sans présenter un défaut de fonctionnement est donc de 4,5%.

2 Épreuves de Bernoulli

Définition : épreuve de Bernoulli

On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire à deux issues. L'une est nommé **succès** de probabilité $p \in [0\,;\,1]$ et l'autre est nommée **échec** de probabilité $1-p$.

Exemple

On lance une pièce de monnaie et on note S : « Obtenir pile » et E : « Obtenir face ».
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

Définition : Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli prenant la valeur 1 pour un succès et 0 pour un échec. On note p la probabilité du succès.
On dit que X est une **variable de Bernoulli** de paramètre p ou que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p.
La loi de probabilité suivie par X est la suivante :

x_1	0	1
$p(X=x_i)$	$1-p$	p

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
L'espérance $E(X)$ est alors :

$$E(X) = p$$

Exemple

Jean-Kevin joue à un jeu. Il lance un dé cubique non truqué numéroté de 1 à 6. S'il obtient 5, il gagne. Sinon, il perd.
On note X la variable aléatoire associée à cette épreuve de Bernoulli. Le succès S est ≪ Obtenir la face portant le numéro 5 ≫ a une probabilité de réalisation de $\frac{1}{6}$.

On a donc $p = \frac{1}{6}$ et $1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. La loi de probabilité de X est donc :

x_1	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

L'espérance de cette variable aléatoire X est $E(X) = p = \frac{1}{6}$.

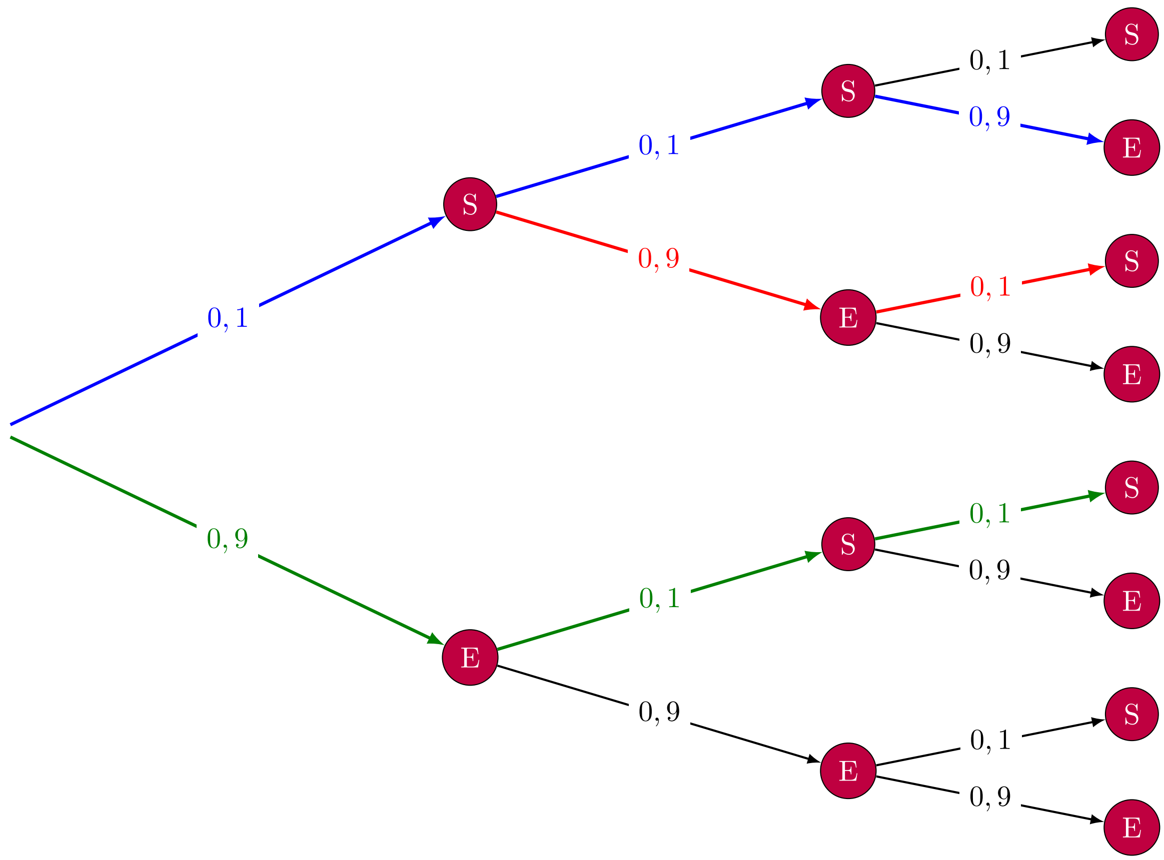
Cela signifie que la probabilité que Jean-Kevin gagne est de $\frac{1}{6}$.

Remarque

Il est possible de représenter par un arbre de probabilités la répétition de n épreuves identiques et indépendantes de Bernoulli afin de calculer des probabilités.

Exemple

Jean-Kevin joue à une roue de casino où la probabilité de gagner S est de 10%.
Il joue trois fois de suite de façon identique et indépendante à ce jeu. Il chercher à connaître la probabilité de gagner exactement deux fois.



Les chemins qui correspondent à la situation ont été mis en évidence et coloriés en bleu, rouge et vert. Il y a donc trois chemins.

Probabilité du chemin bleu : $0,1 \times 0,1 \times 0,9 = 0,009$
Probabilité du chemin rouge : $0,1 \times 0,9 \times 0,1 = 0,009$
Probabilité du chemin vert : $0,9 \times 0,1 \times 0,1 = 0,009$

$0,009 + 0,009 + 0,009 = 0,027$

La probabilité que Jean-Kevin gagne exactement deux fois est donc de 0,027 soit 2,7%.