# Fonction dérivée

## 1 Des dérivées à connaître

**Définition : fonction dérivable**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
On dit que $f$ est **dérivable sur $I$** si $f$ est dérivable pour tout réel $a$ de $I$.

La fonction qui, à tout réel $x$ de $I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée la **fonction dérivée** de $f$.
On la note $f'$. On dit aussi la dérivée de $f$.

**Propriété : les dérivées à connaître**

| $f(x)$ | Domaine de définition de $f$ | $f'(x)$ | Domaine de définition de $f'$ |
|---|---|---|---|
| $a$ où $a \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| $ax$ où $a \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ | $a$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^2$ | $\mathbb{R}$ | $2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^3$ | $\mathbb{R}$ | $3x^2$ | $\mathbb{R}$ |

**Propriété : opérations sur les dérivées**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{R}$.

- La fonction $f+g$ est dérivable sur $I$ et $(f+g)' = f' + g'$
- La fonction $kf$ est dérivable sur $I$ et $(kf)' = k \times f'$

**Exemple : dérivée d'un polynôme de degré 3**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 4x^3 - 5x^2 + x - 4$.

L'expression de la dérivée de $4x^3$ est $4 \times 3x^2 = 12x^2$.
L'expression de la dérivée de $5x^2$ est $5 \times 2x = 10x$.
L'expression de la dérivée de $x$ est 1.
L'expression de la dérivée de 4 est 0.

Ainsi, $f'(x) = 12x^2 - 10x + 1$.

## 2 Variation et extrema d'une fonction

**Théorème**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$.

- Si $f$ est (strictement) croissante sur alors $f$ est croissante sur $I$ alors pour tout réel $x$ de $I$, $f'(x) \geqslant 0$ (ou $f(x) > 0$).
- Si $f$ est (strictement) décroissante sur alors $f$ est croissante sur $I$ alors pour tout réel $x$ de $I$, $f'(x) \leqslant 0$ (ou $f(x) < 0$).

**Démonstration**

Soit $x$ un réel de $I$ et soit $h$ un réel non nul tel que $x + h \in I$.

■ Si $f$ est croissante sur $I$ alors :

- si $h > 0$ alors $x + h > x$ et $f(x+h) \geqslant f(x)$ et donc $f(x+h) - f(x) \geqslant 0$
- si $h < 0$ alors $x + h > x$ et $f(x+h) \leqslant f(x)$ et donc $f(x+h) - f(x) \leqslant 0$

Dans les deux cas, $f(x+h) - f(x)$ et $h$ sont de même signe donc $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$.

Si $h$ se rapproche de plus en plus près de 0 alors $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \geqslant 0$ prend des valeurs positives.

Ainsi, $f'(x) \geqslant 0$.

■ Si $f$ est décroissante sur $I$ la démonstration est analogue.

**Théorème**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.

- Si $f'$ est (strictement) positive sur $I$ alors $f$ est (strictement) croissante sur $I$.
- Si $f'$ est (strictement) négative sur $I$ alors $f$ est (strictement) décroissante sur $I$.
- Si $f'$ est nulle sur $I$ alors $f$ est constante sur $I$.

**Remarque**

Cette dernière propriété est très utile pour étudier les variations d'une fonction.

### Exemple : étude des variations d'un polynôme de degré 3

On souhaite étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de $f : x \mapsto x^3 + 3x^2 - 9x + 7$.

(1) On calcule l'expression de la dérivée de $f$ : $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$.

(2) $3 > 0$ donc $f'$ est positive sauf entre ses racines (qui sont $-3$ et $1$).

(3) Ainsi, $f'$ est strictement positive sur $]-\infty\,;\,-3[$ et $]1\,;\,+\infty[$ et strictement négative sur $]-3\,;\,1[$.
En utilisant la précédente propriété, on en déduit que $f$ est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-3[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-3\,;\,1[$.

Ces informations peuvent figurer dans le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

### Définitions (rappels)

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. Soient $a$ et $b$ deux réels de $I$.

- On dit que $f$ admet un **maximum** en $a$ si pour tout réel $x$ de $I$ $f(a) \geqslant f(x)$.
- On dit que $f$ admet un **minimum** en $a$ si pour tout réel $x$ de $I$ $f(a) \leqslant f(x)$.
- On dit que $f$ admet un **extremum** sur $I$ si elle possède un maximum ou un minimum sur $I$.

### Propriété

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert $I$ de $\mathbb{R}$.
Si la dérivée $f'$ s'annule et change de signe en un réel $a$ de $I$ alors $f$ admet un extremum en $x = a$.

### Exemple : étude des variations d'un polynôme de degré 3

On reprend l'exemple précédent.

La fonction $f$ admet un maximum sur $]-\infty\,;\,1[$ en $-3$ qui vaut $f(-3) = (-3)^3 + 3 \times (-3)^2 - 9 \times (-3) + 7 = 34$.
La fonction $f$ admet un minimum sur $]-3\,;\,+\infty[$ en $1$ qui vaut $f(1) = 1^3 + 3 \times 1^2 - 9 \times 1 + 7 = 2$.

On peut ainsi compléter le précédent tableau de variations de la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | $34$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | |