

Sommes de deux carrés par les entiers de Gauss

Entier de Gauss

On considère l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + ib$ où a et b sont des entiers relatifs. Les éléments de cet ensemble sont appelés les **entiers de Gauss**.

La norme d'un entier de Gauss est défini par la fonction $N : z \mapsto z\bar{z} = |z|^2$. De ce fait, les normes des entiers de Gauss sont des entiers relatifs.

Propriété

Soit n un entier naturel.

n est la somme de deux carrés d'entiers si et seulement si n est la norme d'un entier de Gauss.

Exemples

$$0^2 = 0^2 + 0^2$$

$$1^2 = 0^2 + 1^2$$

$$2^2 = 1^2 + 1^2$$

$$4^2 = 2^2 + 0^2$$

$$5^2 = 2^2 + 1^2$$

$$8^2 = 2^2 + 2^2$$

$$9^2 = 3^2 + 0^2$$

$$10^2 = 3^2 + 1^2$$