Nombre dérivé

1 Sécante et tangente à une courbe représentative

Définition : sécante à une courbe

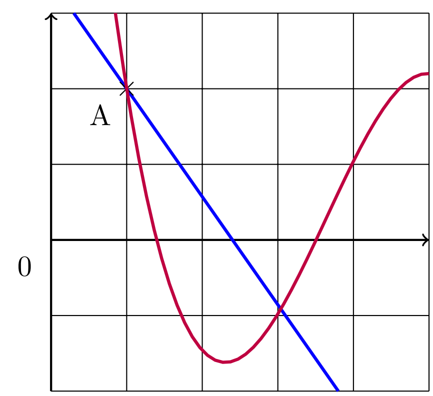
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient a un réel de I.

On appelle **sécante** à la courbe représentative de f passant par $\mathrm{A}(a\,;\,f(a))$, la droite passant par A et coupant la courbe représentative de f.

Exemple

Sur la figure ci-contre, on peut voir la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -0,4x^3 + 4,37x^2 - 13,77x + 11,8$.
On ne donne que la représentation graphique sur $[0\,;\,5]$.

En bleu, une sécante à la courbe représentative de la fonction f en $\mathrm{A}(1\,;\,2)$.



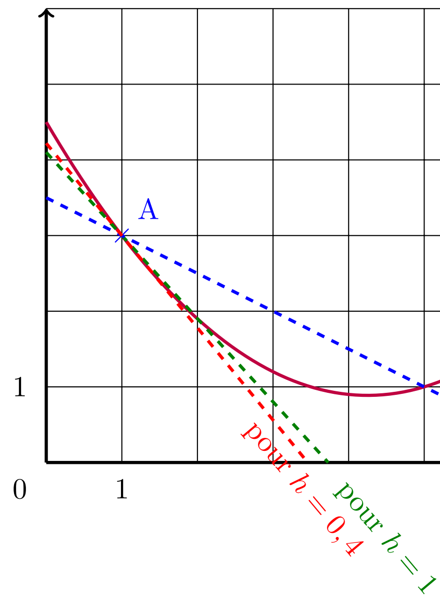
Définition : taux de variation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un nombre réel a.
La fonction τ définie pour tout réel $h \neq 0$ telle que $a + h \in I$ par :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

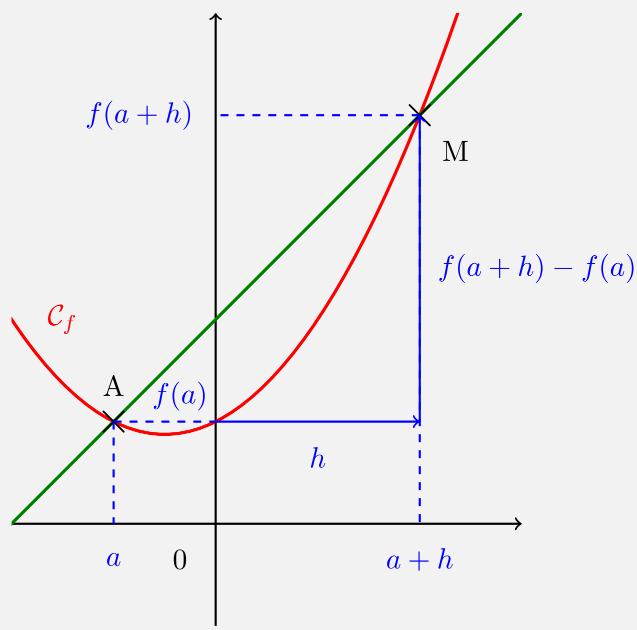
est appelée **taux d'accroissement** de f en a.

Représentations graphiques de plusieurs sécantes en fonction de la valeur de h



Remarque

On considère deux points A et M de la courbe représentative de f dont les abscisses respectives sont a et $a+h$.
$\tau(h)$ représente le coefficient directeur de la droite (AM). On a en effet $\tau(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}}}$.



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Soit M un point du plan.
La **tangente** à $\mathcal{C}_f$ en un point A est la position limite de la droite (AM) quand le point M se rapproche de A tout en restant sur $\mathcal{C}_f$.

2 Nombre dérivé

Définition : nombre dérivé en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel de I.
On dit que f est **dérivable en a** si le taux d'accroissement de f en a admet une limite réelle quand h tend vers 0. Ce nombre « limite » est noté $f'(a)$ est se nomme **nombre dérivé de f en a**.
Quand f est dérivable en a on a ainsi :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Exemple

- On veut calculer la valeur du nombre dérivé de la fonction carré en 3.

  $\forall\ h \neq 0 : \tau(h) = \dfrac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = 6 + h.$

  Si h se rapproche de 0 alors $6+h$ se rapproche de 6. On note alors $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 6$.
  Donc $f'(3) = 6$ en notant f la fonction carrée.

- Notons g la fonction racine carré. On veut vérifier si elle est dérivable en 0.

  $\forall\ h \neq 0 : \tau(h) = \dfrac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}.$

  Si h se rapproche de 0 alors $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient extrêmement grand. On note alors $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = +\infty$ qui n'est pas un nombre réel.
  La fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0.

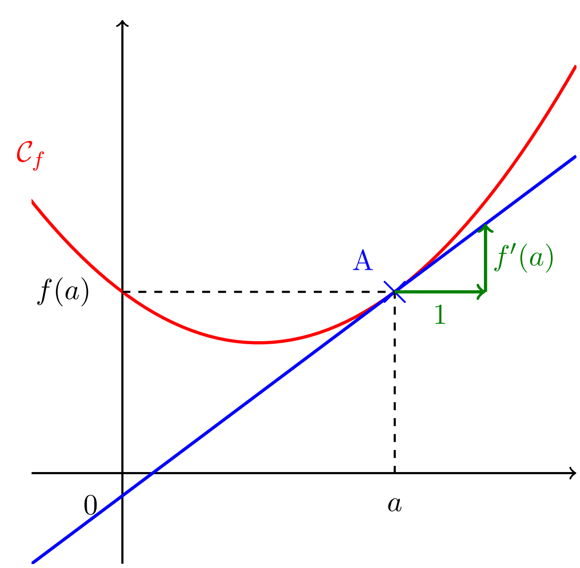
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit a un réel de I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
Si f est dérivable en a, la **tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point $\mathrm{A}(a\,;\, f(a))$ est la droite passant par A et dont le coefficient directeur est $f'(a)$.

Propriété

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $\mathrm{A}(a\,;\, f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



Exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{R}$ par $x^2 - x - 1$. On souhaite déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 3. Une équation de cette tangente est $y = f'(3)(x-3) + f(3)$.

$f(3) = 3^2 - 3 - 1 = 5$.

Pour calculer $f'(3)$, on doit connaître la limite du taux d'accroissement de f en 3.

$$\tau(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 - (3+h) - 1 - 5}{h} = \frac{h^2 + 5h}{h} = h + 5.$$

$\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = 5$. Donc $f'(3) = 5$.

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 3 est donc $y = 5(x-3) + 5$.