Probabilités conditionnelles

1 Quelques rappels

Définition : probabilité

Quand on réalise un très grand nombre de fois une même expérience aléatoire, dans les mêmes conditions, la fréquence à laquelle un évènement se réalise se rapproche d'une fréquence théorique. Cette fréquence théorique se nomme **probabilité** de l'évènement.

Remarque

Une probabilité peut s'exprimer sous la forme d'une fraction, d'une écriture décimale ou d'un pourcentage.

Propriété

La probabilité est un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Exemple

Dans une classe de 20 élèves, il y a 6 élèves qui ont des lunettes. Dans cette même classe, il y a 8 élèves qui ont une veste noire.
On sélectionne au hasard un élève de cette classe. On note L l'évènement « l'élève porte des lunettes » et on note V l'évènement « l'élève porte une veste noire ».

La probabilité que l'élève interrogé porte des lunettes est de $\dfrac{6}{20}$ soit $\dfrac{3}{10}$ ou encore 0,3 soir 30%.
On note alors $P(\mathrm{L}) = 0,3$. De même, $P(\mathrm{V}) = 0,4$.

Définitions : intersection

Soient A et B deux évènement d'une expérience aléatoire. On appelle **intersection de A et de B** l'ensemble des issues qui appartiennent à la fois à A et à B. On le note $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ que l'on prononce « A inter B ».

Si l'intersection de A et de B est vie on dit que A et B sont **incompatibles** ou encore **disjoints**.

Définition : réunion

Soient A et B deux évènement d'une expérience aléatoire. On appelle **réunion de A et de B** l'ensemble des issues qui appartiennent au moins à l'un des deux évènement A ou B. On note cet évènement $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ et on prononce « A union B ».

Définition : évènement contraire

Soit A un évènement d'une expérience aléatoire.
On appelle **évènement contraire de A** l'évènement constitué de toutes les issues qui n'appartiennent pas à A.
On parle aussi d'évènement **complémentaire**. Cet évènement est noté $\overline{\mathrm{A}}$ et se prononce « A barre ».

Exemples

On lance un dé à 6 faces non truqué et on considère les évènements suivants :

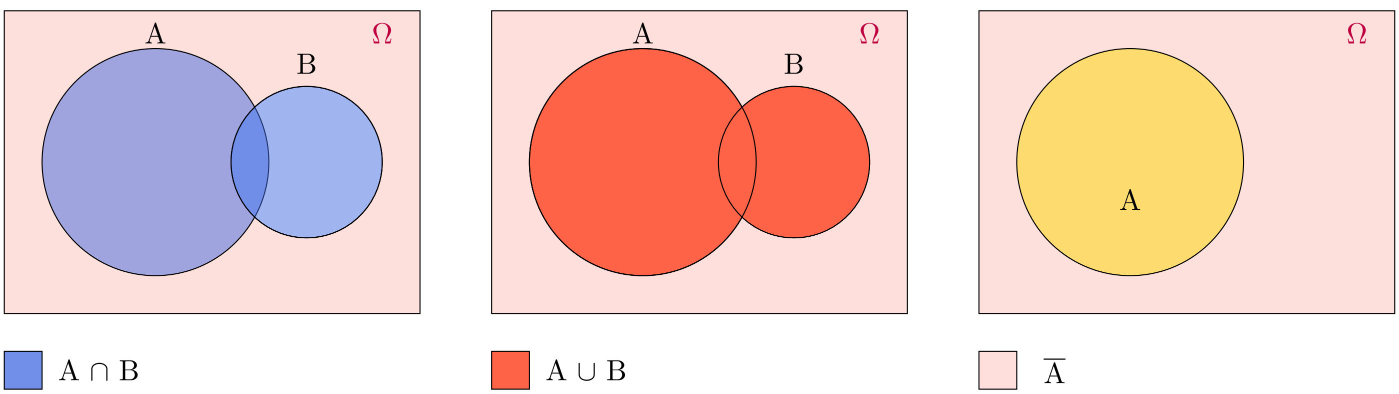
A = « Obtenir un nombre pair » B = « Obtenir un multiple de 3 »

On a alors $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{ 6 \}$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{ 2 ; 3 ; 4 ; 6\}$.

On a de plus $\overline{\mathrm{A}}$ = « Ne pas obtenir un nombre pair » = « 1 ; 3 ; 5 ».

Remarque

On peut aussi les définitions précédentes grâce aux schémas suivants :



Propriétés

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω. Soient A et B deux évènement de Ω.

- $P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$
- $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$

2 Probabilités conditionnelles

Définition : probabilité conditionnelle

Soient A et B deux évènements d'une même expérience aléatoire.
On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** la probabilité que l'évènement B se réalise sachant que l'évènement est réalisé. Cette probabilité est note $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$.

Propriété

Si on se place dans une situation d'équiprobabilité, on a :

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{Card}(\mathrm{A})}$$

Exemple

Jean-Kevin réalise le bilan de ses magasins, répartis dans plusieurs villes. Chacun de ses magasins propose à la vente des chocolats et des fruits. Voici le tableau qu'il a réalisé pour l'occasion.

	A	B	C	D	E
1	**Villes**	Argenta (A)	Olivillle (O)	Lavandia (L)	**Total**
2	**Chocolats vendus (C)**	22	10	18	50
3	**Fruits vendus (F)**	12	35	23	70
4	**Total**	34	45	41	120

Jean-Kevin va choisir au hasard la fiche d'un achat effectué et regarde le type de produit acheté et dans quel magasin il a été acheté.

On souhaite calculer la probabilité que le produit acheté soit un fruit sachant qu'il a été acheté à Argenta.
Il s'agit donc de $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{F})$.

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{F}) = \frac{\mathrm{Card}(\mathrm{F} \cap \mathrm{A})}{\mathrm{Card}(\mathrm{A})} = \frac{12}{34} = \frac{6}{17}$$

La probabilité que le produit acheté soit un fruit sachant qu'il a été acheté à Argenta est donc de $\frac{6}{17}$.

Définitions : dans le monde médical

Lors d'un teste diagnostique, pour savoir si un patient est malade (M), on appelle **faux positif** un test positif (T) alors que le patient est non malade ($\overline{\mathrm{M}}$).
On appelle alors **faux négatif** un test négatif ($\overline{\mathrm{T}}$) alors que le patient est malade.

La **sensibilité** d'un test correspond à la probabilité qu'un patient ait un test positif sachant qu'il est malade, soit la probabilité conditionnelle $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$.
La **spécificité** d'un test correspond à la probabilité qu'un patient ait un test négatif sachant qu'il n'est pas malade, soit la probabilité conditionnelle $P_{\overline{\mathrm{M}}}(\overline{\mathrm{T}})$.