Variables aléatoires

1 Variable aléatoire

Définition : variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire et on note son univers Ω.
On appelle **variable aléatoire** une fonction définie sur Ω qui, à chaque issue de cette expérience aléatoire, associe un nombre de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Cette fonction est souvent notée X.
On note alors $\{X = a\}$ l'ensemble des issues auxquelles on associe la valeur a. La probabilité que cette issue se réalise est donc notée $P(X = a)$.
On note $\{X < a\}$ l'ensemble des issues auxquelles on associe une valeur inférieure à a.

Exemple

On dispose des tickets sur une table. Il y a 20 tickets au total. Il y a trois tickets qui permettent de gagner 2€, il y en a 10 qui permettent de gagner 1€. Les autres sont perdants.
Jean-Kevin pioche un de ces tickets au hasard.

On note X la variable aléatoire associée au gain de cette expérience. X peut prendre la valeur 0 ou 1 ou 2.

On a $P(X = 0) = \dfrac{7}{20}$: c'est la probabilité que Jean-Kevin pioche un ticket perdant.

$P(X = 1) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$ et $P(X = 2) = \dfrac{3}{20}$.

$P(X < 2) = \dfrac{17}{20}$. C'est la probabilité de gagner moins de 2€ en piochant un de ces tickets.

Définition : loi de probabilité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire prenant des valeurs x_i pour $i \in [0\,;\,n]$.
On note $P(X = x_i)$ la probabilité de l'ensemble des issues ayant pour image x_i par X.

On appelle **loi de probabilité de X** l'ensemble des $P(X = x_i)$.

Exemple

Si on reprend l'exemple précédent, la loi de probabilité de X peut être représentée par le tableau ci-contre :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\dfrac{7}{20}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{20}$

Définition : espérance

On considèrere une variable aléatoire X dont on donne ci-dessous la loi de probabilité :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$P(x = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

On appelle **espérance** de la variable aléatoire X le nombre noté $E(X)$ ou $\overline{X}$ définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + ... + x_n \times p_n$$

Il s'agit de la moyenne des valeurs x_i pondérées par leurs probabilités p_i.

Exemple

On reprend l'exemple précédents des tickets et on souhaite déterminer $E(X)$.

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{20} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{20} = \frac{4}{5}$$

Remarque

Lorsqu'il s'agit d'un jeu, celui-ci est favorable au joueur si son espérance est un nombre positif et défavorable si son espérance est un nombre négatif.
Dans l'exemple précédent, le gain moyen est donc de 0,80€.

Définition

Quand l'espérance d'une expérience aléatoire vaut 0 on dit qu'elle est **équitable**.

2 Loi de Bernoulli

Définition : épreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues.
La première est nommée **succès**, notée S, de probabilité notée $p \in [0; 1]$. La seconde est nommée **échec**, notée E ou $\overline{\text{S}}$, de probabilité $1 - p$.

Exemple

On lance une pièce de monnaie et on note S : « Obtenir pile » et E : « Obtenir face ».
Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli.

Définition : Loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire associée à une épreuve de Bernoulli prenant la valeur 1 pour un succès et 0 pour un échec. On note p la probabilité du succès.
On dit que X est une **variable de Bernoulli** de paramètre p ou que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p.
La loi de probabilité suivie par X est la suivante :

x_1	0	1
$p(X = x_i)$	$1 - p$	p

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
L'espérance $E(X)$ est alors :

$$E(X) = p$$

Exemple

Jean-Kevin joue à un jeu. Il lance un dé cubique non truqué numéroté de 1 à 6. S'il obtient 5, il gagne. Sinon, il perd.
On note X la variable aléatoire associée à cette épreuve de Bernoulli. Le succès S est ≪ Obtenir la face portant le numéro 5 ≫ a une probabilité de réalisation de $\frac{1}{6}$.

On a donc $p = \frac{1}{6}$ et $1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. La loi de probabilité de X est donc :

x_1	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

L'espérance de cette variable aléatoire X est $E(X) = p = \frac{1}{6}$.

Cela signifie que la probabilité que Jean-Kevin gagne est de $\frac{1}{6}$.