Produit scalaire : approfondissement

Loi des sinus

Soit ABC un triangle. On appelle la loi des sinus la relation suivante :

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin(\widehat{\mathrm{BAC}})} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin(\widehat{\mathrm{ABC}})} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin(\widehat{\mathrm{BCA}})}$$

Exercice n°1

1. On considère un triangle ABC tel que $\mathrm{AB} = 3$ cm, $\widehat{\mathrm{BAC}} = 64°$ et $\widehat{\mathrm{ACB}} = 31°$. Déterminer la longueur BC arrondie au dixième.
2. On considère un triangle ABC tel que $\mathrm{BC} = 9$ cm, $\mathrm{AC} = 6$ cm et $\widehat{\mathrm{CAB}} = 58,1°$. Déterminer une valeur arrondie à l'unité de l'angle $\widehat{\mathrm{CBA}}$.

Correction

1. D'après la loi des sinus, on a :

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin(\widehat{\mathrm{BAC}})} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin(\widehat{\mathrm{ABC}})} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin(\widehat{\mathrm{BCA}})}$$

$$\text{Donc } \frac{\mathrm{BC}}{\sin(64)} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin(\widehat{\mathrm{ABC}})} = \frac{3}{\sin(31)}$$

$$\text{Donc BC} = \frac{\sin(64) \times 3}{\sin(31)} \approx 5,2.$$

La longueur de BC est d'environ 5,2 cm.

2. D'après la loi des sinus, on a :

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin(\widehat{\mathrm{BAC}})} = \frac{\mathrm{AC}}{\sin(\widehat{\mathrm{ABC}})} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin(\widehat{\mathrm{BCA}})}$$

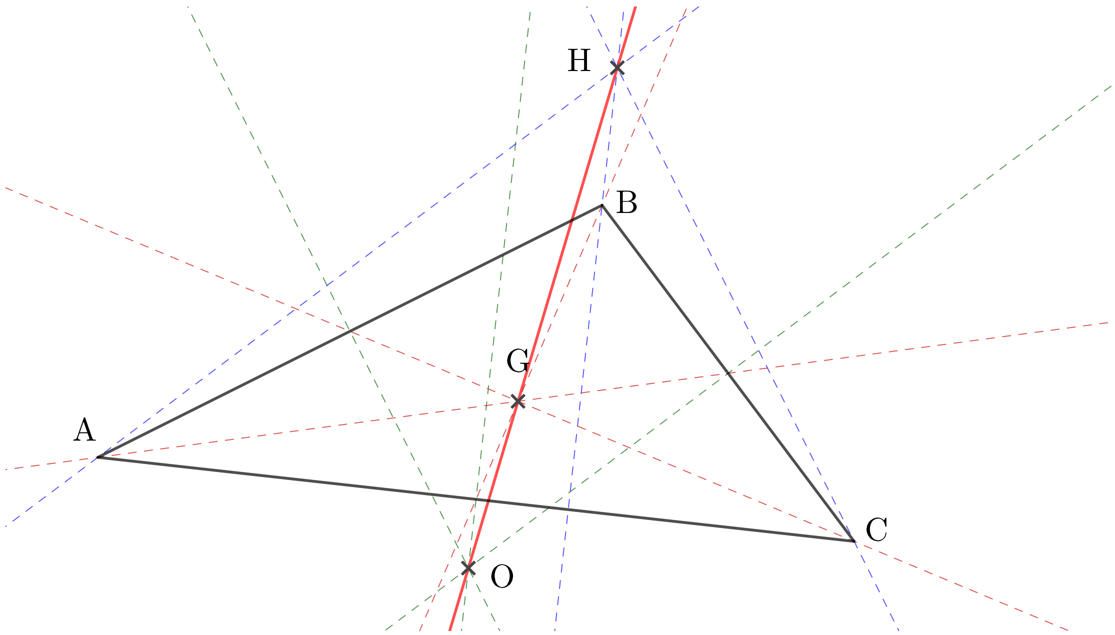
$$\text{Donc } \frac{9}{\sin(58,1)} = \frac{6}{\sin(\widehat{\mathrm{ABC}})} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin(\widehat{\mathrm{BCA}})}$$

$$\text{Donc } \sin(\widehat{\mathrm{BCA}}) = \frac{\sin(58,1) \times 6}{9}$$

$$\text{Puis } \widehat{\mathrm{BCA}} = \arccos\left(\frac{\sin(58,1) \times 6}{9}\right) \approx 34°$$

Droite d'Euler

Soit ABC un triangle non équilatéral.
Le centre de gravité, noté G, l'orthocentre, noté H et le centre du cercle circonscrit, noté O, de ABC sont aligné et appartiennent donc à une même droite appelée **droite d'Euler**.



En pointillés bleus sont tracées les trois hauteurs du triangle ABC dont le point d'intersection est l'orthocentre, H.
En pointillés verts sont tracées les trois médiatrices du triangle ABC dont le point d'intersection est le centre du cercle circonscrit de ABC, O.
En pointillés rouges sont tracées les trois médianes du triangle ABC dont le point d'intersection est le centre de gravité de ABC, G.
Les points H, G et O sont sur la droite d'Euler, représentée en trait plein rouge.

Exercice : démontrer l'alignement de ces trois points

1. En partant de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, montrer que les trois médiatrices de ABC sont concourante en un unique point G.

2. Soit H un point tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Montrer que les trois hauteurs de ABC sont concourantes.

3. Montrer que les points O, G et H sont alignés.

Correction

1. Soit G un point tel que $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\overrightarrow{0}$. Soient A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [BA]. Les droites (AA'), (BB') et (CC') sont les médianes de ABC.
   A l'aide de la relation de Chasles :

   $$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\\=&\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\=&3\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\=&3\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{AA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B}}+\overrightarrow{\mathrm{AA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'C}}\\=&3\overrightarrow{\mathrm{GA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B}}+\overrightarrow{\mathrm{A'C}}\end{aligned}$$

   Puisque A' est le milieu de [BC], on a $\overrightarrow{\mathrm{A'B}}+\overrightarrow{\mathrm{A'C}}=\overrightarrow{0}$. Ainsi :

   $$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=3\overrightarrow{\mathrm{GA}}+2\overrightarrow{\mathrm{A'A}}=\overrightarrow{0}.$$

   On obtient ainsi $3\overrightarrow{\mathrm{GA}}=-2\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$ ou encore $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AA'}}$.

   On montre de même que $\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{BB'}}$ et que $\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CC'}}$.

   G est donc l'unique point de concours des trois médiatrices et on connaît même son emplacement.

2. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC. On a donc AO = BO = CO.
   Soit H un point tel que $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$. En utilisant la relation de Chasles :

   $$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B}}+\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'C}}\\\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{AH}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{A'B}}+\overrightarrow{\mathrm{A'C}}\\\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{AH}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA'}}\end{aligned}$$

   Puisque (OA') est la médiatrice de (BC) alors $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. Et puisque $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ est aussi orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. Ce qui signifie que H appartient à la hauteur issue de A.

   On raisonne de la même façon pour montrer que H est sur la hauteur issue de B et de C. H est donc le points d'intersection des trois hauteurs de ABC.

3. G est tel que $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\overrightarrow{0}$. Ensuite, H est tel que $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$. En utilisant la relation de Chasles :

   $$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{\mathrm{OH}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}.\end{aligned}$$

   Ces deux vecteurs sont donc colinéaires et donc les points O, H et G sont alignés