Dérivation : le cas global

1 Les dérivées des fonctions usuelles

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est dérivable pour tout réel a de I, on dit que f est **dérivable sur I**.

La fonction qui, à tout réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$ est alors appelé la **fonction dérivée** de f et est notée f'. On dit aussi la dérivée de f.

Propriétés

Voici les dérivées des fonctions usuelles.

$f(x)$	Domaine de définition de f	f'(x)	Domaine de définition de f'
$a \in \mathbb{R} : f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R} : f(x) = ax$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N}^* : f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$n \in \mathbb{N}^* : f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n-1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[\,0\,;+\infty\,[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]\,0 : +\infty\,]$

Démonstration Montrons que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Déterminons son taux d'accroissement en 0. Soit $h > 0$: $\dfrac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}\times\sqrt{h}}{h\times\sqrt{h}} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$.

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$. On n'obtient pas un nombre réel donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Démonstration Montrons la formule de la dérivée de la fonction carrée.

Soit $h \neq 0$ et soit a un réel quelconque : $\dfrac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \dfrac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \dfrac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$

$\lim\limits_{h \to 0} 2a + h = 2a$. On obtient bien le résultat de la propriété.

Démonstration Montrons la formule de la dérivée de la fonction inverse.

Soit $h \neq 0$ et soit $a \neq -h$: $\dfrac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \dfrac{\dfrac{a}{a(a+h)} - \dfrac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \dfrac{\dfrac{-h}{a(a+h)}}{h} = -\dfrac{1}{a(a+h)}$

$\lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{1}{a(a+h)} = -\dfrac{1}{a^2}$. On obtient bien le résultat de la propriété.

2 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriétés

Soient u et v deux fonction dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Fonction dérivée
$u+v$	$(u+v)' = u' + v'$
k est un réel : ku	$(ku)' = k \times u'$
$u \times v$	$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
u ne s'annule pas sur I : $\dfrac{1}{u}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
v ne s'annule pas sur I : $\dfrac{u}{v}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

Démonstration Montrons la formule sur le produit de deux fonctions dérivables sur I.

$$\begin{aligned}
\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} &= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)v(a+h) - u(a)v(a+h) + u(a)v(a+h) - u(a)v(a)}{h} \\
&= \frac{(u(a+h) - u(a))v(a+h) + u(a)(v(a+h) - v(a))}{h} \\
&= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h}
\end{aligned}$$

En passant à la limite de cette expression quand h tend vers 0, on obtient : $u'(a)v(a) + u(a = v'(a)$. C'est ce que l'on voulait démontrer.

Exemples Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 6x^2 + 7x - 1$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{2x+4}{6x^2+42}$.

- Pour déterminer f', on utilise la somme de fonctions dérivables.
  $5x^3 = 5 \times x^3$. Or la dérivée de x^3 c'est $3x^2$. Donc la dérivée de $5x^3$ c'est $5 \times 3x^2 = 15x^2$.
  De la même manière, la dérivée de $6x^2$ est $12x$, la dérivée de $7x$ est 7 et la dérivée d'une constante est 0.
  On a donc $f'(x) = 15x^2 - 12x + 7$.

- Pour déterminer g', on va utiliser la dérivée du quotient de deux fonctions.
  On pose pour tout réel x : $u(x) = 2x + 4$ et $v(x) = 6x^2 + 42$. On a alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 12x$.

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{2(6x^2+42) - (2x+4) \times 12x}{(6x^2+42)^2} = \frac{-12x^2 - 48x + 84}{(6x^2+42)^2}$$

Remarque Pour le dernier exemple, il vaut mieux garder la forme factorisée.

Propriété

Soit g une fonction dérivable sur I et soient a et b deux réels tels que $ax + b \in I$.
La dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$ est $g'(ax+b) \times a$.

Exemple Soit f la fonction définie sur $\left[\dfrac{4}{5}\,;\,+\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{5x-4}$.

$$f'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{5x-4}} = \frac{5}{2\sqrt{5x-4}}.$$

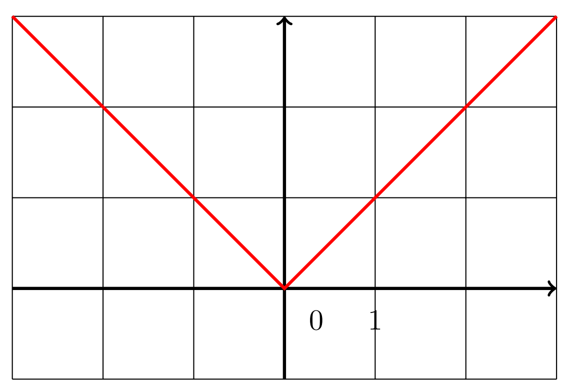
3 Cas de la fonction valeur absolue

Définition

La fonction **valeur absolue** est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

Propriété

La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0]$ puis strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.



Propriété

La fonction valeur absolue est dérivable pour tout réel différent de 0.

Démonstration

Soit h un réel strictement positif et soit a un réel : $\dfrac{|a+h|-|a|}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$.

Soit h un réel strictement négatif et soit a un réel : $\dfrac{|a+h|-|a|}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \dfrac{-h}{h} = -1$.

Donc la limite en 0 n'existe pas car elle dépend du signe de h. La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.