Suites arithmétiques et géométriques

1 Les suites arithmétiques

Définitions

On dit qu'une suite est **arithmétique** si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en ajoutant au précédent un même nombre.
Si (u_n) est une suite arithmétique elle est donc définie par un réel u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n + r$ où r est un réel.
Le réel r est appelé **raison** de la suite.

Exemple

La suite des entiers naturels multiples de 6 est une suite arithmétique dont le premier terme vaut 0, le deuxième terme 6, le troisième terme 12 et ainsi de suite.
Cette suite arithmétique a pour raison 6.
Si on note cette suite (u_n), elle est défini par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 6$.

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$.

- Si $r > 0$ alors (u_n) est croissante sur son ensemble de définition.
- Si $r < 0$ alors (u_n) est décroissante sur son ensemble de définition.

Méthode : montrer qu'une suite est arithmétique

Pour montrer qu'une suite (u_n) est arithmétique :

(1) On calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques $u_{n+1} - u_n$.

(2) Si le résultat est un nombre réel, il s'agit d'une suite arithmétique dont la raison est le nombre réel trouvé. Si le résultat dépend de n, ce n'est pas une suite arithmétique.

Exemples

- La suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = (n+1)^2 - n^2$ est-elle arithmétique ?

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= (n+1+1)^2 - (n+1)^2 - [(n+1)^2 - n^2] \\ &= n^2 + 4n + 4 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 2n - 1 + n^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

(w_n) est donc une suite arithmétique de raison 2.

- La suite (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = n^2 - 1$ est-elle arithmétique ?

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (n+1)^2 - 1 - (n^2 - 1) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 1 - n^2 + 1 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Le résultat dépend de n donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

Propriété

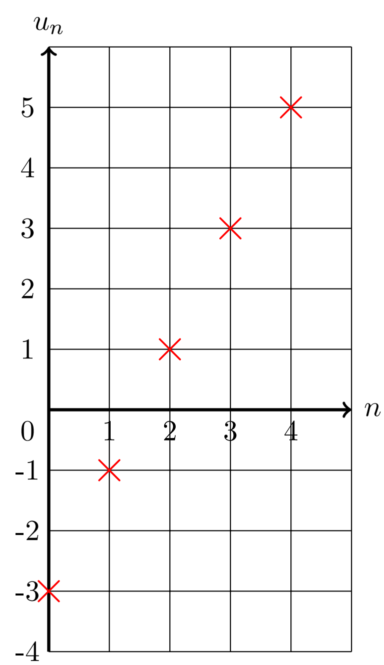
La représentation graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points tous alignés.

Remarque

On retrouve l'allure de la représentation graphique d'une fonction affine.
u_0 peut être assimilé à l'ordonnée à l'origine et r au coefficient directeur.

Exemple

On donne ci-contre la représentation graphique de la suite arithmétique (u_n) telle que $u_0 = -3$ et de raison 2.



2 Suite géométrique

Définitions

On dit qu'une suite est **géométrique** si, à partir de son terme initial, chaque terme est obtenu en multipliant le précédent par un même nombre.
Si (v_n) est une suite géométrique, elle est donc définie par un v_0 et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = v_n \times q$ où q est un réel.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite (v_n).

Exemple

La suite (v_n) des puissances de 2 est une suite géométrique.
Son premier terme est 1 ($2^0 = 1$), le suivant est 2, le suivant est 4, et ainsi de suite.

Elle est donc défini par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = v_n \times 2$. La raison de cette suite est 2.

Propriété

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $q \in \mathbb{R}$.

- Si $v_0 > 0$:

  Si $q > 1$ alors la suite (v_n) est croissante sur son ensemble de définition.
  Si $0 < q < 1$ alors la suite (v_n) est décroissante sur son ensemble de définition.

- Si $v_0 < 0$:

  Si $q > 1$ alors la suite (v_n) est décroissante sur son ensemble de définition.
  Si $0 < q < 1$ alors la suite (v_n) est croissante sur son ensemble de définition.

Peu importe le cas, si $q < 0$ alors les termes consécutifs de la suite changent alternativement de signe, et la suite n'est ni croissante, ni décroissante.

Méthode : montrer qu'une suite est géométrique

Pour montrer qu'une suite (v_n) est géométrique :

(1) On calcule le quotient entre deux termes consécutifs quelconques $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

(2) Si le résultat est un nombre réel, il s'agit d'une suite géométrique dont la raison est le nombre réel trouvé. Si le résultat dépend de n, ce n'est pas une suite géométrique.

Exemple

La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{3n}}$ est-elle géométrique ?

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{2^{2(n+1)}}{3^{3(n+1)}}}{\dfrac{2^{2n}}{3^{3n}}} = \frac{2^{2(n+1)}}{3^{3(n+1)}} \times \frac{3^{3n}}{2^{2n}} = \frac{2^{2n} \times 2^2}{3^{3n} \times 3^3} \times \frac{3^{3n}}{2^{2n}} = \frac{4}{27}$$

(v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{4}{27}$.

Propriété

La représentation graphique d'une suite géométrique est un nuage de points non alignés.

Remarque

On parle d'allure exponentielle.

Exemple

Ci-dessous à gauche, la représentation graphique de la suite géométrique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1,5^n$ et ci-dessous à droite, la représentation graphique de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,5^x$.