Les transformations du plan

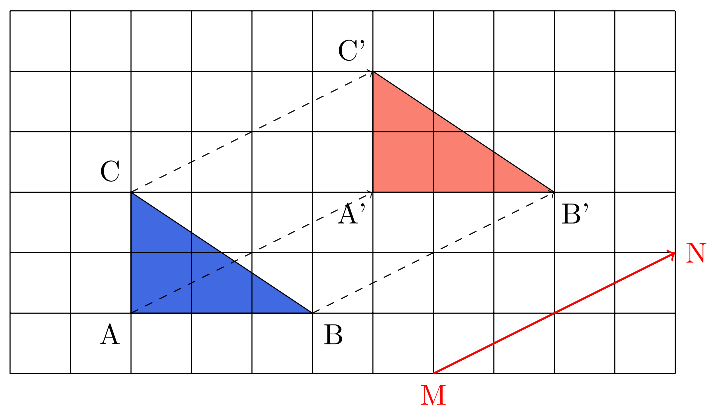
1 Les translations

Définition

Transformer une figure par **translation** c'est la faire glisser sans la déformer, ni la tourner ni la retourner.
Pour effectuer une translation, il faut un déplacement de référence, c'est à dire un déplacement à reproduire.

Exemple

On veut effectuer la translation de ABC par la translation qui va du point M au point N.
Le déplacement qui va de M vers N est de 4 carreaux vers la droite puis 2 carreaux vers le haut.
On reproduit donc ce déplacement à partir des point A, B et C pour obtenir le triangle A'B'C'.
On dit alors que le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par la translation qui transforme M en N.



Définition

La flèche qui représente la translation est appelé **vecteur**.
Pour représentation la translation qui va d'un point A vers un point B on notera $\overrightarrow{AB}$.

Exemple

Dans l'exemple précédent, A'B'C' est l'image de ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

Propriété

La translation conserve les angles, les longueurs et le parallélisme. Une figure et son image par translation sont donc superposables.

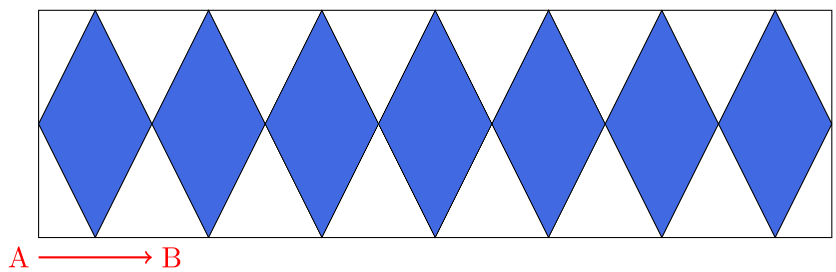
2 Frises et pavages

Définitions

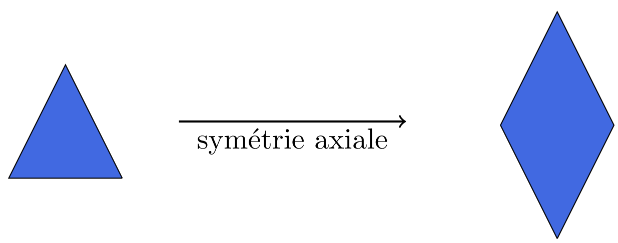
Une **frise** est une figure géométrique constituée d'un motif de base reproduit dans une seule direction par plusieurs translations.
On appelle **motif de base** le motif qui est reproduit plusieurs fois sur la frise. Celui-ci peut être réalisé à partir d'autres transformations (symétries, translation, ...).

Exemple

La frise ci-dessous a été réalisée en partant du losange bleu puis reproduit plusieurs fois par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Le motif de base (losange bleu) peut être obtenu en effectuant une symétrie axiale d'un triangle isocèle.

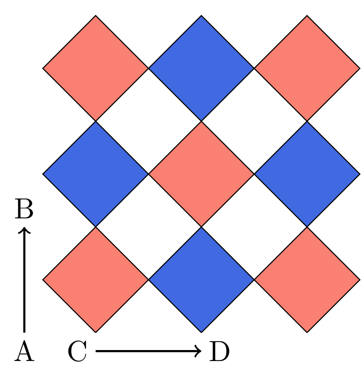


Définition

Un **pavage** est une figure géométrique constituée d'un motif de base reproduit plusieurs fois dans deux directions différentes par translation.

Exemple

Le pavage ci-contre a été obtenu en partant d'un carré rouge. Ensuite, trois translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ ont été réalisé. Puis, à partir des trois carrés (les deux rouges et le bleu), on a réalisé deux translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.



3 Les rotations

Définitions

Transformer une figure par **rotation**, c'est la faire pivoter :

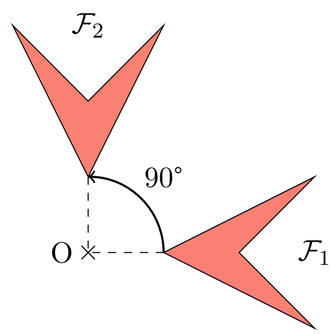
- autour d'un point, le **centre de rotation**
- selon un angle de rotation
- et selon un sens horaire ou anti-horaire.

Remarque

Le sens horaire est le sens des aiguilles d'une montre (on parle aussi de sens indirect). Le sens anti-horaire est le sens inverse des aiguilles d'une montre (on parle aussi de sens direct).

Exemple

Ici, $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}_1$ par la rotation de centre O, d'angle 90° dans le sens anti-horaire.



Propriété

La rotation conserve les angles, les longueurs et le parallélisme. Une figure et son image par translation sont donc superposables.

Remarques

- L'image du centre O par une rotation de centre O est le centre O lui-même.
- Effectuer une rotation d'angle 180° revient à réaliser une symétrie centrale dont le centre est le centre de rotation.

4 Les rosaces

Définition

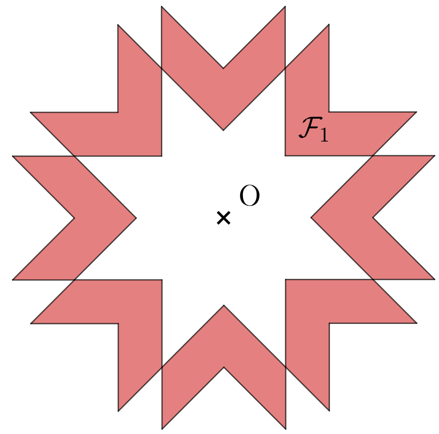
Une **rosace** est une figure géométrique composée d'un motif qui est reproduit plusieurs fois par un même rotation.

Exemple

Ici, le polygone $\mathcal{F}_1$ a été reproduit plusieurs fois par une rotation de centre O (peu importe le sens de rotation car on revient à la figure de départ).
Il reste tout de même à trouver l'angle de rotation.

Sans compter la figure de départ, il y a 8 autres figures. Un tour complet correspond à 360°. On calcule donc $360 \div 8 = 45$.

On a donc réalisé 8 rotations de centre O, d'angle 45° dans le sens horaire (ou anti-horaire).



5 Les homothéties

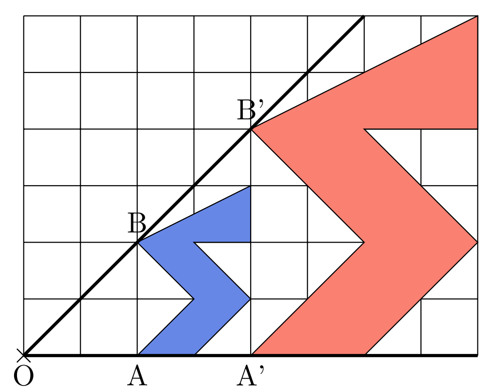
Définition

On considère un point O et un nombre relatif k.

Transformer une figure par **homothétie** de centre O et de rapport k c'est l'agrandir ou la réduire en faisant glisser les points de cette figure le long de droites passant par O.
Les longueurs de la figure sont ainsi multipliées par k.

Exemple

Ici, la figure rouge est l'image de la figure bleue par l'homothétie de centre O et de rapport 2. Cela signifie que les longueurs de la figure rouge sont deux fois plus grandes que celles de la figure bleue.
Ainsi, OA' = 2×OA tout comme OB' = 2×OB.



Propriétés

On se place dans le cadre d'une homothétie de rapport $k \neq 0$ et de centre O.

- Si $k = 1$, l'image de la figure de départ par cette homothétie est la même.
- Si $k > 1$, l'image de la figure de départ par cette homothétie est un agrandissement de la figure de départ.
- Si $0 < k < 1$, l'image de la figure de départ par cette homothétie est une réduction de la figure de départ.
- Si $k < 0$, on fait glisser les points de la figure de départ de l'autre côté du centre de l'homothétie et on effectue ainsi un demi-tour de la figure de départ.

Propriétés

- Une figure et son image par une homothétie ont la même forme mais elles ne sont pas superposables. En effet, l'homothétie conserve les angles, les alignements de points mais pas forcément les longueurs.
- Quand les longueurs d'une figure sont multipliées (ou divisées) par un nombre k, les aires sont multipliées (ou divisées) par k^2 et les volumes sont multipliées (ou divisés) par k^3.

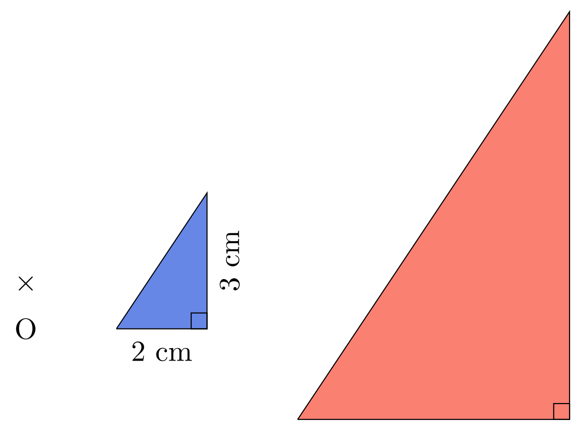
Exemple

Le triangle rouge est l'image du triangle bleu par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Aire du triangle bleu :

$\mathcal{A} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{2 \times 3}{2} = 3.$
L'aire du triangle bleu est de 3 cm^2.

Les longueurs du triangle rouge sont 3 fois plus grandes que celles du bleu.
$2 \times 3 = 6$ et $3 \times 3 = 9$.



Aire du triangle rouge :

$\mathcal{A} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{6 \times 9}{2} = 27.$ L'aire du triangle rouge est de 27 cm^2.

Les longueurs ont été multipliées par 3 mais les aires ont été multipliées par 9 (3^2).