Probabilités conditionnelles : approfondissement

Succession de plusieurs épreuves indépendantes

Pour des expériences aléatoires avec plusieurs épreuves indépendantes, on utilise à nouveau un arbre pondéré mais qui possède plus de branches que ceux utilisés jusqu'à présent.

Exercice

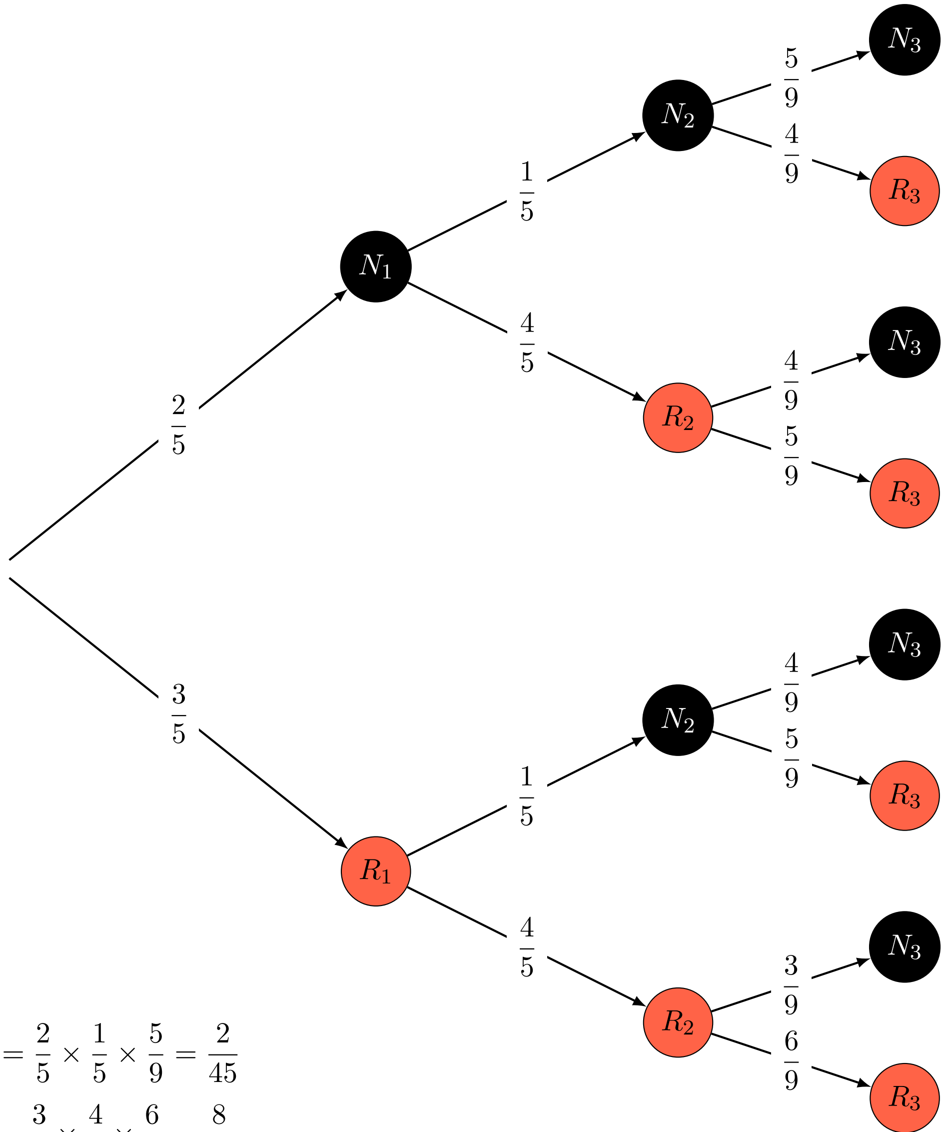
On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3.
Dans l'urne U_1 il y a deux boules noires et trois rouges. L'urne U_2 contient une boule noire et quatre rouges. Enfin, l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre rouges.
On pioche une boule de l'urne U_1, puis une boule de U_2. On place ensuite ces deux boules dans U_3 et on pioche une boule de U_3. On note les évènements suivants :

N_i : « La boule tirée de l'urne i est noire »
R_i : « La boule tirée de l'urne i est rouge »

1. Déterminer les probabilités des évènements suivants $N_1 \cap N_2 \cap N_3$ et $R_1 \cap R_2 \cap R_3$.
2. Que vaut $P(N_1 \cap N_3)$?
3. Quelle est la probabilité de tomber sur une boule noire au dernier tirage ?
4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

Correction

Pour tout l'exercice, on va s'aider de l'arbre pondéré situé sur la feuille suivante.



1. $P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{5}{9} = \dfrac{2}{45}$

   $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{6}{9} = \dfrac{8}{25}$.

2. $$\begin{aligned} P(N_1 \cap N_3) &= P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(N_1 \cap R_3 \cap N_3) \\ &= \frac{2}{45} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} \\ &= \frac{14}{75}. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} P(N_3) &= P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(N_1 \cap R_2 \cap N_3) + P(R_1 \cap N_2 \cap N_3) + P(R_1 \cap R_2 \cap N_3) \\ &= \frac{2}{45} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{9} \\ &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

4. Le nombre de boules noires dans U_3 dépend, entre autre, de ce que l'on a pioché dans l'urne U_1 et donc de N_1. Les évènements N_1 et N_3 ne sont donc pas indépendants.

   On peut également montrer que $P(N_1) \times P(N_3) \neq P(N_1 \cap N_3)$:

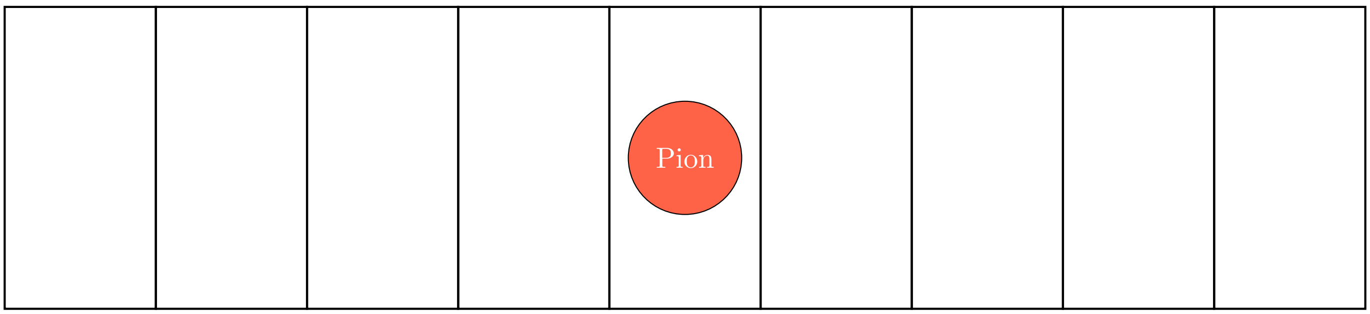
   $P(N_1) \times P(N_3) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{25}$ alors que $P(N_1 \cap N_3) = \dfrac{14}{75}$.

Marche aléatoire

Une **marche aléatoire** est une succession de pas réalisée indépendamment les uns des autres et de façon aléatoire.

Exercice

Un tapis de jeu est constitué de neuf cases juxtaposées. Un pion est placé sur la case centrale, il se déplace sur le tapis grâce au lancer d'une pièce : pile le pion se déplace d'une casé à droite et face, il se déplace d'une case vers la gauche.



L'expérience consiste à effectuer quatre déplacements successifs du jeton.

1. Quelle est la probabilité que le pion termine sur la case la plus à gauche du tapis ?
2. Quelle est la probabilité que le pion termine sur la troisième case à droite du tapis ?
3. Quelle est la probabilité que le pion revienne sur la case de départ ?

Correction

On note les évènements suivants :

G_1 : « le pion est sur la première case à gauche du tapis »

G_2 : « le pion est sur la deuxième case à gauche du tapis »

G_3 : « le pion est sur la troisième case à gauche du tapis »

G_4 : « le pion est sur la quatrième case à gauche du tapis »

D_1 : « le pion est sur la première case à droite du tapis »

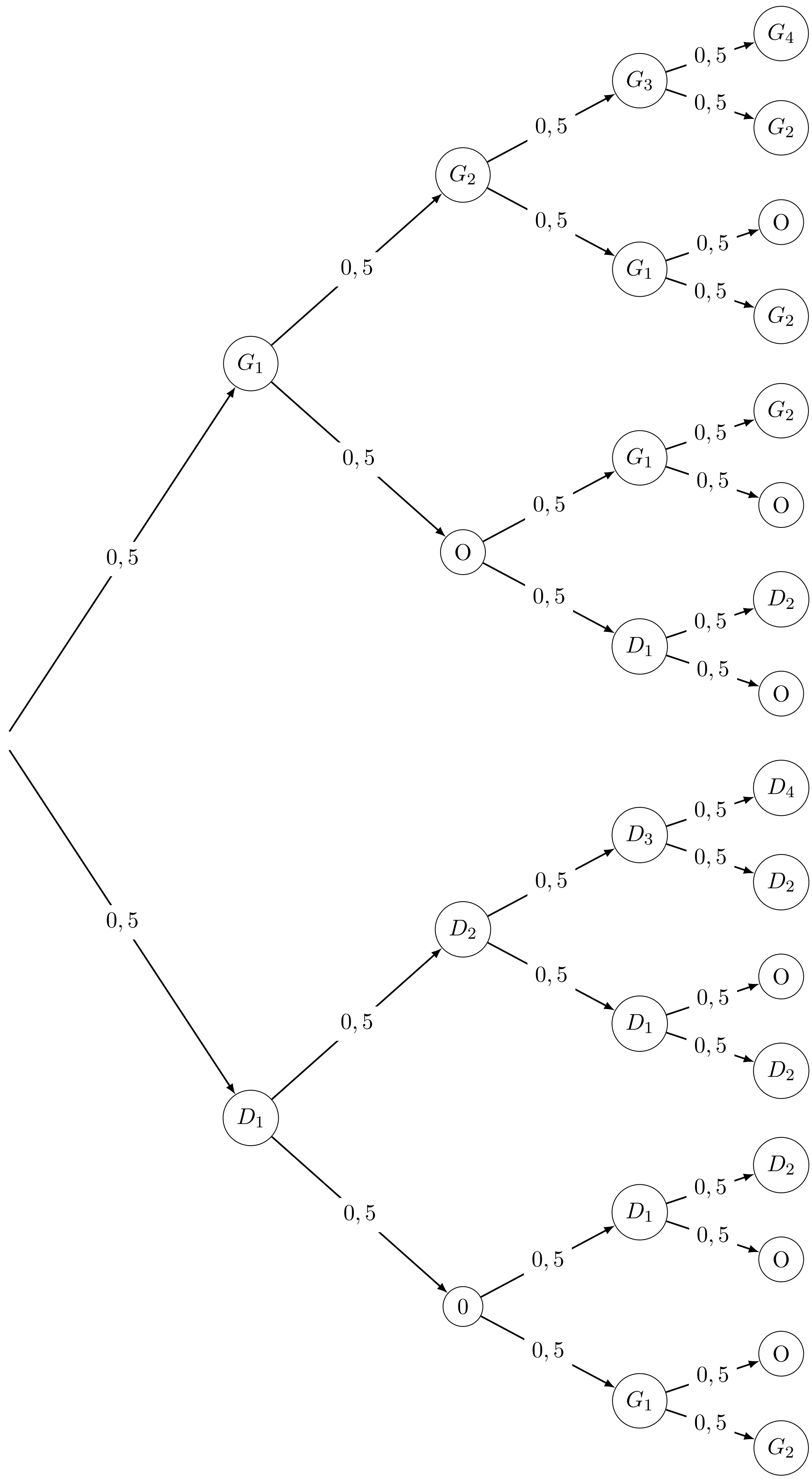
D_2 : « le pion est sur la deuxième case à droite du tapis »

D_3 : « le pion est sur la troisième case à droite du tapis »

D_4 : « le pion est sur la quatrième case à droite du tapis »

O : « Le pion est sur la case de départ »

On construit l'arbre pondéré suivant correspondant à une succession de 4 épreuves indépendantes (page suivante).


0,5
0,5
G_1
D_1
0,5
0,5
0,5
0,5
G_2
O
D_2
0
0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
0,5
G_3
G_1
G_1
D_1
D_3
D_1
D_1
G_1
0,5
G_4
G_2
O
G_2
G_2
O
D_2
O
D_4
D_2
O
D_2
D_2
O
O
G_2

1. $P(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4) = 0,5^4 = 0,0625$.
   La probabilité que le pion termine sur la case la plus à gauche est d'environ 6%.

2. Il est impossible que le pion termine sur la troisième case à droite du tapis. La probabilité est donc de 0.

3. Il y a six chemins menant à la case initiale.
   Chaque chemin a la même probabilité de se réaliser : $0,5^4$.
   Ainsi : $P(\text{O}) = 4 \times 0,5^4 = 0,25$.
   Il y a donc 25% de chance que le pion termine sur la case de départ après la marche aléatoire de 4 pas.