Méthode de dichotomie

La méthode par dichotomie est un algorithme de recherche permettant, par exemple, de donner une approximation de la solution des équations du type $f(x) = 0$ sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
On se place dans le cas où f est continue et strictement monotone sur $[a : b]$.

On calcule d'abord le milieu c de cet intervalle : $c = \dfrac{a+b}{2}$ puis on regarde si la solution appartient à l'intervalle $[a\,;\,c]$ ou $[c\,;\,b]$.
Si la solution se trouve dans $[a\,;\,c]$, on réitère le procédé dans $[a\,;\,c]$, sinon, dans $[c\,;\,b]$.

L'algorithme repose sur le test suivant :

Si $f(a) \times f(b) < 0$ (dans ce cas, la solution se situe entre a et c)
Alors b prend la valeur de c
Sinon a prend la valeur de c

Exercice n°1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 14$.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}$.
3. On chercher une estimation d'une des solutions, celle de l'intervalle $[0\,;\,2]$. En programmant un algorithme de dichotomie sur Python, donner un encadrement de cette solution à 10^{-3} près.

> Correction des exercices

Exercice n°1

1. f est une fonction polynomiale donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout réel x : $f'(x) = 12x^3 - 4x^3 - 12x^2 + 14 = 12x(x^2 - x - 2)$. Les racines de cette dérivée sont 0, -1 et 2.
   On obtient le tableau de variations suivant :

x	∞		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$		9		14		-18		$+\infty$

2. Sur $[0\,;\,2]$, f est strictement décroissante et $f(0) = 14$ et $f(2) = -18$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle.
   On montre de façon analogue qu'il existe une unique solution sur $[2\,;\,+\infty[$.

3. Voici le programme Python :

```
def f(x):
  f=3*x*x*x*x−4*x*x*x−12*x*x+14
  return f

a=int(input("Borne inférieure"))
b=int(input("Borne supérieure"))
p=float(input("Précision de la solution souhaitée"))
while b−a>p:
  c=(a+b)/2
  if f(a)*f(c)<0:
    b=c
  else:
    a=c
print("La solution de l'équation f(x) = 0 se situe dans l'intervalle", "[",a, ";", b,"]")
```

Borne inférieure 0
Borne supérieure 2
Précision de la solution souhaitée 0.001

>> La solution de l'équation f(x) = 0 se situe dans l'intervalle [1.041015625 ; 1.0419921875]