

Variables aléatoires : approfondissement

Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire. On note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i(x_i^2 - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n p_i(x_i^2 - E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i(x_i^2 - 2x_iE(X) + E(X)^2) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n p_i x_i E(X) + \sum_{i=1}^n p_i E(X) \\ &= E(X^2) - 2E(X) \sum_{i=1}^n p_i x_i + E(X)^2 \sum_{i=1}^n p_i \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \quad \text{car la somme des } p_i = 1 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Exercice d'application : étude de la fonction $x \mapsto E((X - x)^2)$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto f(x) = E((X - x)^2)$ où X est une variable aléatoire. On se propose d'étudier l'existence d'un potentiel minimum de f sur \mathbb{R} .

1. Développer puis réduire l'expression de $f(x)$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x .
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.
4. Conclure.

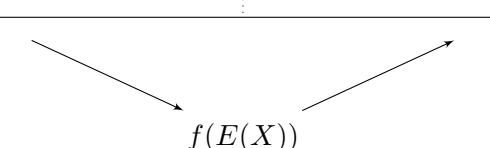
Correction

$$\begin{aligned} 1. \quad E((X - x)^2) &= E(X^2 - 2xX + x^2) \\ &= E(X^2) - 2xE(X) + x^2E(1) \\ &= E(X^2) - 2xE(X) + x^2. \end{aligned}$$

2. $E(X^2)$ et $E(X)$ sont des constantes réelles de la fonction f . Ainsi, pour tout x réel on a $f'(x) = 2x - 2E(X)$.

$$\begin{aligned} 3. \quad f'(x) \geqslant 0 &\Leftrightarrow 2x - 2E(X) \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow 2x \geqslant 2E(X) \\ &\Leftrightarrow x \geqslant E(X) \end{aligned}$$

On obtient alors le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	$E(X)$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f		$f(E(X))$	

4. f admet donc un minimum en $E(X)$.

$$f(E(X)) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

D'après la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Le minimum de cette fonction est donc atteint en $x = E(X)$ et la valeur de ce minimum est $V(X)$.