

Variables aléatoires : approfondissement

Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire. On note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i^2 - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Démonstration

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i^2 - E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i^2 - 2x_i E(X) + E(X)^2) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n p_i x_i E(X) + \sum_{i=1}^n p_i E(X)^2 \\ &= E(X^2) - 2E(X) \sum_{i=1}^n p_i x_i + E(X)^2 \sum_{i=1}^n p_i \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 \quad \text{car la somme des } p_i = 1 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Exercice d'application : étude de la fonction $x \mapsto E((X - x)^2)$

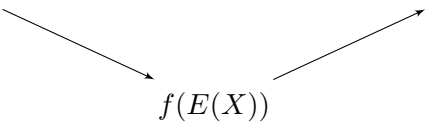
Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $x \mapsto f(x) = E((X - x)^2)$ où X est une variable aléatoire. On se propose d'étudier l'existence d'un potentiel minimum de f sur \mathbb{R} .

1. Développer puis réduire l'expression de $f(x)$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x .
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.
4. Conclure.

Correction

1. $E((X - x)^2) = E(X^2 - 2xX + x^2)$
 $= E(X^2) - 2xE(X) + x^2E(1)$
 $= E(X^2) - 2xE(X) + x^2.$
2. $E(X^2)$ et $E(X)$ sont des constantes réelles de la fonction f . Ainsi, pour tout x réel on a $f'(x) = 2x - 2E(X)$.
3. $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x - 2E(X) \geq 0$
 $\Leftrightarrow 2x \geq 2E(X)$
 $\Leftrightarrow x \geq E(X)$

On obtient alors le tableau de variations de la fonction f sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	$E(X)$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\begin{smallmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{smallmatrix}$	$+$
f			

4. f admet donc un minimum en $E(X)$.

$$f(E(X)) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2.$$

D'après la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Le minimum de cette fonction est donc atteint en $x = E(X)$ et la valeur de ce minimum est $V(X)$.