Variables aléatoires : approfondissement

Formule de König-Huygens

Soit X une variable aléatoire. On note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

$V(X)=\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(x_i^2-E(X))^2=E(X^2)-E(X)^2$

Démonstration

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i^2-E(X))^2\\
&= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i^2-2x_iE(X)+E(X)^2)\\
&= \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2-2\sum_{i=1}^{n} p_ix_iE(X)+\sum_{i=1}^{n} p_iE(X)\\
&= E(X^2)-2E(X)\sum_{i=1}^{n} p_ix_i+E(X)^2\sum_{i=1}^{n} p_i\\
&= E(X^2)-2E(X)E(X)+E(X)^2 \quad \text{car la somme des } p_i=1\\
&= E(X^2)-E(X)^2
\end{aligned}$$

Exercice d'application : étude de la fonction $x \mapsto E((X - x)^2)$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto f(x)=E((X-x)^2)$ où X est une variable aléatoire. On se propose d'étudier l'existence d'un potentiel minimum de f sur $\mathbb{R}$.

1. Développer puis réduire l'expression de $f(x)$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur son ensemble de définition.
4. Conclure.

Correction

1. $E((X-x)^2) = E(X^2 - 2xX + x^2)$
$$= E(X^2) - 2xE(X) + x^2E(1)$$
$$= E(X^2) - 2xE(X) + x^2.$$

2. $E(X^2)$ et $E(X)$ sont des constantes réelles de la fonction f. Ainsi, pour tout x réel on a $f'(x) = 2x - 2E(X)$.

3. $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x - 2E(X) \geqslant 0$
$$\Leftrightarrow 2x \geqslant 2E(X)$$
$$\Leftrightarrow x \geqslant E(X)$$

   On obtient alors le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$E(X)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(E(X))$	$\nearrow$	

4. f admet donc un minimum en $E(X)$.

   $f(E(X)) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$.

   D'après la formule de König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Le minimum de cette fonction est donc atteint en $x = E(X)$ et la valeur de ce minimum est $V(X)$.