Les polynômes du second degré (2)

1 Résolution d'une équation du second degré

Définition

On considère le polynôme du second degré $f :\mapsto ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le **discriminant** de f.

Propriété

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$. On considère le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ qui est $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Démonstration On considère la forme canonique du polynôme : $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

Ainsi, $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$

Puisque $a \neq 0$ on peut écrire $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$

Ce qui est équivalent à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.

- Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car le membre de gauche est un carré, donc positif et le membre de droite est négatif.
- Si $\Delta = 0$ alors l'équation revient à $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ qui a pour unique solution $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$

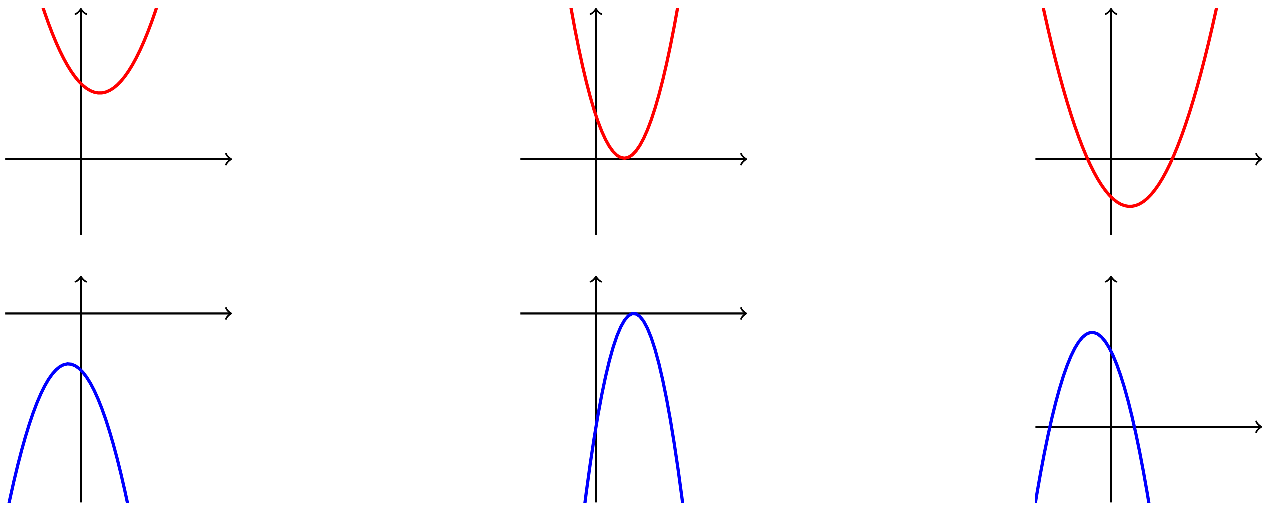
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

Cette équation admet ainsi deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Remarque Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ correspondent à l'intersection entre la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ et l'axe des abscisses.
Exemples avec $a>0$ et $a<0$.



$\Delta < 0$ $\Delta = 0$ $\Delta > 0$

Exemple Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2-2x-4=0$.

$\Delta = b^2-4ac = (-2)^2-4\times 2\times(-4) = 36$. Puisque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{36}}{2\times 2} = -1 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{36}}{2\times 2} = 2$$

Les solutions de l'équation sont donc -1 et 2.

Propriété

Soit le polynôme ax^2+bx+c où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$ tel que $\Delta>0$. Notons x_1 et x_2 les deux racines de ce polynôme. On a :

$$x_1+x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1\times x_2 = \frac{c}{a}$$

2 Factorisation et signe d'un polynôme du second de gré

Propriété

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$. On considère le polynôme $ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines du polynôme.
- Si $\Delta = 0$ alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$ où x_0 est l'unique racine du polynôme.
- Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ n'admet pas de factorisation dans $\mathbb{R}$.

Remarque A l'aide de cette propriété, on peut factoriser un polynôme du second degré pour ensuite pouvoir étudier son signe sur $\mathbb{R}$.

Propriété

Soient a, b et c des réels avec $a \neq 0$. On considère le polynôme $f : \mapsto ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$ alors le polynôme est du signe de a sauf entre ses racines :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$ alors le polynôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta < 0$ alors le polynôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	

Exemple Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $5x^2 - 9x + 2 > 0$.

$\Delta = b2 - 4ac = (-9)^2 - 4 \times 5 \times 2 = 41$.
$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes sur $\mathbb{R}$.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9)-\sqrt{41}}{2\times 5} = \frac{9-\sqrt{41}}{10} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9)+\sqrt{41}}{2\times 5} = \frac{9+\sqrt{41}}{10}$$

On réalise maintenant le tableau de signe en utilisant la précédente propriété :

x	$-\infty$		$\frac{9-\sqrt{41}}{10}$		$\frac{9+\sqrt{41}}{10}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de $5x^2-9x+2>0$ sont donc $S = \left]-\infty\,;\,\frac{9-\sqrt{41}}{10}\right[\cup \left]\frac{9+\sqrt{41}}{10}\,;\,+\infty\right[$.