

Proportionnalité

1 Reconnaître une situation de proportionnalité

Définition

On dit que deux grandeurs sont **proportionnelles** si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre différent de 0.

Exemples

- Quand on achète des cerises, le prix varie selon la masse de cerises achetées. On parle de « prix au kg ». Si on prend 2 kg de cerises, on payera deux fois plus cher, si on en prend 10 kg, on payera 10 fois plus cher et ainsi de suite. C'est une situation de proportionnalité.
- En revanche, la taille et le poids ne sont pas deux grandeurs proportionnelles. Si on multiplie son âge par deux, on ne multiplie pas forcément sa taille par deux.

Propriétés de la proportionnalité

On considère deux grandeurs proportionnelles.

Si on multiplie ou si on divise les valeurs de la première grandeur par un nombre différent de 0 alors les valeurs de la deuxième grandeurs seront aussi multipliées ou divisées par ce même nombre.

Méthode : Reconnaître une situation de proportionnalité

Pour reconnaître une situation de proportionnalité, on peut s'aider d'un tableau et vérifier si les propriétés de la proportionnalités s'appliquent.

Exemple n °1 : début

Dans un magasin, 6 t-shirts coûtent 66€ et 12 de ces mêmes t-shirts coûtent 132€.
Est-ce que le prix payé est proportionnel au nombre de t-shirts achetés ?

Méthode n°1 Passage à l'unité.

Trouvons le prix d'un seul t-shirt. Pour cela, on divise le nombre de t-shirt par le prix correspondant.

$66 \div 6 = 11$. Pour cette première opération, un t-shirt coûte 11€.

$132 \div 12 = 11$. Pour cette deuxième opération, un t-shirt coûte 11€.

Puisque l'on obtient les mêmes résultats, le prix des t-shirts est proportionnel au nombre de t-shirt acheté.

Exemple n °1 : fin

Dans un magasin, 6 t-shirts coûtent 66€ et 12 de ces mêmes t-shirts coûtent 132€.
Est-ce que le prix payé est proportionnel au nombre de t-shirts achetés ?

Méthode n°2 A l'aide d'un tableau.

		$\times 2$	
		$\downarrow$	
$\times 11$ $\leftarrow$	Nombre de t-shirts	6	12
	Prix (en €)	66	132
		$\uparrow$	
		$\times 2$	
		$\leftarrow \times 11$	

Pour passer des valeurs de la première ligne à la deuxième, il faut **multiplier par 11**. Nous avons donc un tableau de proportionnalité ce qui signifie que le prix des t-shirts est proportionnel au nombre de t-shirt acheté.

Pour passer de la deuxième colonne à la troisième, il faut **multiplier par 2**. Nous avons donc un tableau de proportionnalité ce qui signifie que le prix des t-shirts est proportionnel au nombre de t-shirt acheté.

Exemple n °2

Dans un magasin, des stylos sont vendus à 2,10€ l'unité. Si on achète un paquet de 10 de ces stylos, on paye 20€.
Est-ce que le prix des stylos est proportionnel au nombre de stylos achetés ?

Méthode n°1 Passage à l'unité.

Vérifions si le prix à l'unité est le même si on achète un paquet de 10 stylos : $20 \div 10 = 2$.

On ne retrouve pas les 2,1€ donc le prix des stylos n'est pas proportionnel au nombre de stylos achetés.

Méthode n°2 A l'aide d'un tableau

		$\times 10$	
		$\downarrow$	
	Nombre de stylos	1	10
	Prix (en €)	2,10	20
		$\uparrow$	
		$\times 10$	

On ne peut pas appliquer la propriété de la proportionnalité dans ce tableau. Ce tableau n'est donc pas un tableau de proportionnalité ce qui signifie que le prix des stylos n'est pas proportionnel au nombre de stylos achetés.

2 Le coefficient de proportionnalité**Définition**

Quand deux grandeurs sont proportionnelles, on peut passer des valeurs de l'une aux valeurs de l'autre en multipliant par un même nombre, différent de 0.

Ce nombre est appelé le **coefficient de proportionnalité**.

Exemple

Dans l'exemple des t-shirts, 11 est le coefficient de proportionnalité. C'est lui qui permet, par multiplication, de passer des valeurs de la première ligne aux valeurs de la deuxième ligne.

			$\times 2$	
			$\downarrow$	
$\times 11$	Nombre de t-shirts	6	12	$\times 11$
	Prix (en €)	66	132	
			$\uparrow$	
			$\times 2$	

Attention ! Le nombre 2 n'est pas le coefficient de proportionnalité.

Méthode : Utiliser le coefficient de proportionnalité

Grâce au coefficient de proportionnalité, on peut déterminer les valeurs d'une des grandeurs si on connaît les valeurs de l'autre.

Pour cela, on va multiplier ou diviser par le coefficient de proportionnalité.

Exemple

- On reprend l'exemple des t-shirt. On souhaite connaître le prix à payer pour 15 t-shirts achetés.

$\times 11$	Nombre de t-shirts	6	12	15		$\times 11$
	Prix (en €)	66	132	?		

Pour passer des valeurs de la première ligne à la seconde, il faut multiplier par 11.

Ainsi, $15 \times 11 = 165$. Si on achète 15 t-shirts, on va donc payer 165€.

- Jean-Kevin a acheté plusieurs de ces t-shirts et a payé 264€. Combien de t-shirts a-t-il acheté ?

$\div 11$	Nombre de t-shirts	6	12	?		$\div 11$
	Prix (en €)	66	132	264		

Pour passer des valeurs de la deuxième ligne à celles de la première, il faut diviser par 11.

Ainsi, $264 \div 11 = 24$. Jean-Kevin a donc acheté 24 t-shirts.

3 Utiliser une échelle**Définition**

L'**échelle** d'une reproduction (plan, carte, photo, maquette, dessin, ...) est le coefficient de proportionnalité entre les dimensions réelles et les dimensions sur la reproduction.

$$\text{échelle} = \frac{\text{dimension sur la reproduction}}{\text{dimension réelle}}$$

Remarque

Les dimensions réelles et sur la reproduction doivent être exprimées dans la même unité (tout en cm, ou bien tout en km, ...).

Exemple

Jean-Kevin regarde une carte de randonnée à l'échelle $\frac{1}{200000}$.

Cela veut dire que 1 cm sur la carte représente en réalité 200 000 cm. Sur cette carte, il mesure le chemin qui lui reste à parcourir. Il trouve 3,4 cm.

Quelle est la longueur réelle du chemin ?

On utilise un tableau de proportionnalité dont le coefficient est 200 000.

$\times 200\,000$	<table border="1"> <tr> <td>Longueur sur le plan (en cm)</td><td>1</td><td>3,4</td></tr> <tr> <td>Longueur réelle (en cm)</td><td>200 000</td><td>?</td></tr> </table>	Longueur sur le plan (en cm)	1	3,4	Longueur réelle (en cm)	200 000	?	$\div 200\,000$
Longueur sur le plan (en cm)	1	3,4						
Longueur réelle (en cm)	200 000	?						

On doit donc faire $3,4 \times 200\,000 = 680\,000$.

Il lui reste donc 680 000 cm à parcourir ce qui représente 6,8 km.

4 Appliquer un pourcentage**Propriété**

On considère un nombre positif que l'on note t .

Pour calculer $t\%$ d'une quantité, on multiplie cette quantité par $\frac{t}{100}$.

Exemple

Sur un pot de 250 g de crème fraîche, il est écrit « 20% de matière grasse ».

Quelle est la masse de matière grasse contenue dans ce pot de crème fraîche ?

Notre quantité vaut 250 g et notre pourcentage est de 20%. On doit donc faire $250 \times \frac{20}{100} = 50$.

Il y a donc 50 g de matière grasse dans ce pot de crème fraîche.

Puisque $\frac{20}{100} = 0,2$ on peut aussi faire le calcul $250 \times 0,2 = 50$.