

Forme canonique

Soit f un polynôme du second degré à valeurs dans $\mathbb{R}$ défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

f peut aussi s'écrire sous **forme canonique** :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

où α et β sont des nombres réels.

Pour passer de la forme développée à la forme canonique, on utilise les identités remarquables $(a+b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b$ et $(a-b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b$.

Exemple Trouvons la forme canonique de $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 20x + 10 &= 2(x^2 - 10x) + 10 && \text{on factorise les termes en } x \text{ et en } x^2 \text{ par } a \\ &= 2(x^2 - 2 \times 5 \times x + 5^2 - 5^2) + 10 && \text{on fait apparaître une identité remarquable} \\ &= 2((x - 5)^2 - 5^2) + 10 && \text{on écrit l'identité remarquable sous forme factorisée} \\ &= 2(x - 5)^2 - 2 \times 5^2 + 10 && \text{on sort le } -5^2 \text{ de la parenthèse} \\ &= 2(x - 5)^2 - 40 && \text{on simplifie les derniers termes pour trouver la valeur de } \beta \end{aligned}$$

Exercice n°1

Donner la forme canonique des polynômes du second degré suivants :

- | | | |
|---------------------|---------------------|------------------------------|
| a. $4x^2 + 8x + 6$ | b. $16x^2 - 4x + 3$ | c. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ |
| d. $-5x^2 + 4x - 7$ | e. $x^2 + 10x + 5$ | f. $4x^2 + 20x + 28$ |

Exercice n°2

Factoriser les polynômes du second degré suivants :

- | | | |
|-----------------------|----------------------|------------------------------|
| a. $x^2 + 2x - 3$ | b. $3x^2 + 7x - 10$ | c. $2x^2 - 3x + 1$ |
| d. $36x^2 - 60x + 25$ | e. $9x^2 + 24x + 16$ | f. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ |

La correction se trouve sur les feuilles suivantes.

Correction de l'exercice n°1

$$\begin{aligned}
 \text{a. } & 4x^2 + 8x + 6 \\
 &= 4(x^2 + 2x) + 6 \\
 &= 4(x^2 + 2 \times 1 \times x + 1^2 - 1^2) + 6 \\
 &= 4((x + 1)^2 - 1^2) + 6 \\
 &= 4(x + 1)^2 - 4 \times 1^2 + 6 \\
 &= 4(x + 1)^2 - 4 + 6 \\
 &= 4(x + 1)^2 + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } & \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1 \\
 &= \frac{1}{2}(x^2 + 4x) + 1 \\
 &= \frac{1}{2}(x^2 + 2 \times x \times 2 + 2^2 - 2^2) + 1 \\
 &= \frac{1}{2}(x + 2)^2 - \frac{1}{2} \times 2^2 + 1 \\
 &= \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d. } & -5x^2 + 4x - 7 \\
 &= -5\left(x^2 + \frac{4}{-5}x\right) - 7 \\
 &= -5\left(x^2 + 2 \times x \times \frac{4}{-10} + \left(\frac{4}{-10}\right)^2 - \left(\frac{4}{-10}\right)^2\right) - 7 \\
 &= -5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - 5 \times -\left(\frac{2}{-5}\right)^2 - 7 \\
 &= -5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \frac{31}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e. } & x^2 + 10x + 5 \\
 &= (x^2 + 10x) + 5 \\
 &= (x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 - 5^2) + 5 \\
 &= (x + 5)^2 - 5^2 + 5 \\
 &= (x + 5)^2 - 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b. } & 16x^2 - 4x + 3 \\
 &= 16\left(x^2 - \frac{4}{16}x\right) + 3 \\
 &= 16\left(x^2 - \frac{1}{4}x\right) + 3 \\
 &= 16\left(x^2 - 2 \times \frac{1}{8} \times x + \left(\frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2\right) + 3 \\
 &= 16\left(\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2\right) + 3 \\
 &= 16\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 - 16 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 + 3 \\
 &= 16\left(x - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{11}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f. } & 4x^2 + 20x + 28 \\
 &= 4(x^2 + 5x) + 28 \\
 &= 4\left(x^2 + 2 \times \frac{5}{2} \times x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + 28 \\
 &= 4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 28 \\
 &= 4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 3
 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice n°2

a. $x^2 + 2x - 3$

$$= (x^2 + 2x) - 3$$

$$= (x^2 + 2 \times 1 \times x + 1^2 - 1^2) - 3$$

$$= (x + 1)^2 - 1^2 - 3$$

$$= (x + 1)^2 - 4$$

$$= (x + 1)^2 - 2^2$$

$$= (x + 1 - 2)(x + 1 + 2)$$

$$= (x - 1)(x + 3)$$

b. $3x^2 + 7x - 10$

$$= 3 \left(x^2 + \frac{7}{3}x \right) - 10$$

$$= 3 \left(x^2 + 2 \times \frac{7}{6} \times x + \left(\frac{7}{6} \right)^2 - \left(\frac{7}{6} \right)^2 \right) - 10$$

$$= 3 \left(x + \frac{7}{6} \right)^2 - 3 \times \left(\frac{7}{6} \right)^2 - 10$$

$$= 3 \left(x + \frac{7}{6} \right)^2 - \frac{169}{12}$$

$$= 3 \left[\left(x + \frac{7}{6} \right)^2 - \frac{169}{36} \right]$$

$$= 3 \left[\left(x + \frac{7}{6} \right)^2 - \left(\frac{13}{6} \right)^2 \right]$$

$$= 3 \left[\left(x + \frac{7}{6} - \frac{13}{6} \right) \left(x + \frac{7}{6} + \frac{13}{6} \right) \right]$$

$$= 3(x - 1) \left(x + \frac{10}{3} \right)$$

c. $2x^2 - 3x + 1$

$$= 2 \left(x^2 - \frac{3}{2}x \right) + 1$$

$$= 2 \left(x^2 - 2 \times \frac{3}{4} \times x + \left(\frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 \right) + 1$$

$$= 2 \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - 2 \times \left(\frac{3}{4} \right)^2 + 1$$

$$= 2 \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{8}$$

$$= 2 \left[\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right]$$

$$= 2 \left[\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right]$$

$$= 2 \left[\left(x - \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) \left(x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) \right]$$

$$= 2(x - 1) \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

d. $36x^2 - 60x + 25$

$$= (6x)^2 - 6x \times 2 \times 5 + 5^2$$

$$= (6x - 5)^2$$

e. $9x^2 + 24x + 16$

$$= (3x)^2 + 3x \times 2 \times 4 + 4^2$$

$$= (3x + 4)^2$$

f. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

$$= \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1 \quad \text{résultat de l'exercice n°1.c}$$

$$= \frac{1}{2}[(x + 2)^2 - 2]$$

$$= \frac{1}{2}[(x + 2)^2 - (\sqrt{2})^2]$$

$$= \frac{1}{2}(x + 2 - \sqrt{2})(x + 2 + \sqrt{2})$$