Exercices sur les congruences

> Division euclidienne, multiples et diviseurs

Exercice n°1

1. Effectuer la division euclidienne de -31 par 4.
2. Effectuer la division euclidienne de -19 par 4.
3. Effectuer la division euclidienne de $-5\ 000$ par 17.

Exercice n°2

Soit n un entier relatif.

1. Montrer que $6n+5$ n'est pas divisible par 5.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $2n+5$ divise $n-1$.

Exercice n°3

Soit n un entier naturel.

Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $5n+11$ par $2n+3$.

Exercice n°4

On souhaite déterminer les entiers relatifs $n \neq -2$ tels que $\dfrac{2n-29}{n+2}$ soit un entier.

1. Montrer que si n est solution alors $n+2$ divise 33.
2. Etablir la liste des diviseurs de 33 dans $\mathbb{Z}$.
   En déduire les valeurs possibles de n.
3. Conclure quant au problème initial de l'exercice.

Exercice n°5

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 10^2 par 3.
2. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 10^n par 3 vaut 1.
3. Soit n un entier naturel.
   Montrer que $4 \times 10^n - 1$ est divisible par 3.

> Notion de congruence

Exercice n°6

Vérifier les égalités suivantes :

a. $15 \equiv 27\ (3)$ **b.** $17 \equiv 11\ (4)$ **c.** $37^4 \equiv 1\ (4)$

Exercice n°7

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^6 par 7.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^{6p} par 7 où p est un entier naturel non nul.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de 33^{38} par 7.
4. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{437} par 7.

Exercice n°8

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
2. En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009\ (16)$.

Exercice n°9

1. Vérifier que $100 \equiv 1\ (11)$.
2. En déduire que $10^4 \equiv 1\ (11)$.
3. En déduire que $10^3 \equiv -1\ (11)$ et que $10^5 \equiv -1\ (11)$.
4. Montrer que 3 729 est divisible par 11.
5. Montrer que 9 240 est divisible par 11.
6. Etudier la divisibilité de 197 277 par 11.

Exercice n°10

On se donne deux entiers $\mathrm{A} = 8\ 387\ 592\ 115$ et $\mathrm{B} = 9\ 276\ 312\ 516$.

1. Montrer que 1 000 est divisible par 8.
2. Montrer que A est congru à 3 modulo 8.
3. Déterminer l'entier naturel $b < 8$ tel que $\mathrm{B} \equiv b\ (8)$.
4. Déterminer les entiers naturels strictement inférieurs à 8 qui sont congrus respectivement à $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ et à $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

Exercice n°11

1. Déterminer les entiers x tels que $6 + x \equiv 5\ (3)$.
2. Déterminer les entiers x tels que $3x \equiv 5\ (3)$.

Exercice n°12

Soit n un entier naturel.

1. Développer $(n+3)^4$.
2. Montrer que $(n+3)^4 \equiv n^4 + 2n^2 + 1\ (4)$.
3. Etudier en fonction du reste de la division euclidienne de n par 4 la divisibilité de $(n+3)^4$ par 4.

Exercice n°13

1. Le nombre $A = 1305^{1305} + 900^{900}$ est-il divisible par 29 ?
2. On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. Sachant que $(n-1) \equiv -1\ (n)$, calculer le reste de la division euclidienne de 27^{2012} par 7.
3. Quel est le reste de la division euclidienne de 1 000 par 37 ?
4. En déduire que pour tout entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 10^{3n} par 37 est égal à 1.
5. Quel est le reste de la division euclidienne de $N = 10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ par 37 ?

Exercice n°14

On cherche à résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 5\ (7)$.

1. Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier x par 7 ?
2. En déduire les restes possibles de la division euclidienne de $3x$ par 7.
3. Quel est l'ensemble des solutions de cette équation ?