Les puissances de nombres

1 Manipuler des grands nombres

Définition

Soit n un entier positif.
Le produit de n facteurs touts égaux à 10 se note 10^n et lit **10 puissance n** ou encore **10 exposant n**.

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times ... \times 10}_{n \text{ facteurs}}$$

L'entier n est appelé **exposant**.

Exemple

- $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\ 000$
- $10^5 = 100\ 000$

Remarque

Grâce aux puissances de 10 d'exposant positif, il devient plus facile de représenter des grands nombres.

Exemple

- 1 milliard $= 1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$
- 238 millions $= 238\ 000\ 000 = 238 \times 10^6$
- La vitesse de la lumière dans le vide : environ 300 000 000 m/s soit 3×10^8 m/s.

Définition : les préfixes

Un **préfixe multiplicateur** est un préfixe qui vient se placer devant une unité pour faciliter la lecture de certaines grandeurs.

Exemple : les préfixes pour les grands nombres

Préfixe	Symbole	Puissance de 10	Exemples
déca	da	10^1	dam, dag, ...
hecto	h	10^2	hL, hm, ...
kilo	k	10^3	km, kg, ...
méga	M	10^6	Mo, Mégapixels, ...
giga	G	10^9	Go, GW (pour giga watt, ...)

2 Manipuler des petits nombres

Définition

Soit n un entier positif.
Le nombre 10^{-n} et lit **10 puissance $-n$** ou encore **10 exposant $-n$**.

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,000...0}_{n \text{ zéros}}1$$

Exemple

- $10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1\ 000} = 0,001$
- $10^{-5} = 0,00001$

Remarque

Grâce aux puissances de 10 d'exposant négatif, il devient plus facile de représenter des petits nombres.

Exemple

- 1 millionième = 0,000 001 = 10^{-6}
- 257 dix-millièmes = 257×10^{-4}
- La taille, en m, d'un atome d'hydrogène est de $0,53 \times 10^{-10}$ m soit 0,000000000053 m.

Exemples : les préfixes pour les petits nombres

Préfixe	Symbole	Puissance de 10	Exemples
déci	d	10^{-1}	dm, dL, ...
centi	c	10^{-2}	cL, cm, ...
milli	m	10^{-3}	mm, mL, ...
micro	μ	10^{-6}	μm, μg (particules fines), ...
nano	n	10^{-9}	nm

3 La notation scientifique

Définition

On appelle **notation scientifique** d'un nombre l'écriture $a \times 10^n$ où :

- a est un nombre compris entre 1 (inclus) et 10 (exclus) ;
- n est un nombre entier relatif.

Exemples

La notation scientifique de 1 785 000 000 est $1,758 \times 10^9$.
La notation scientifique de 0,000 028 est $2,8 \times 10^{-5}$.

Remarques

La notation scientifique permet de représenter facilement les grands ou les petits nombres.
C'est aussi un moyen efficace de déterminer rapidement un ordre de grandeur d'une quantité.

4 Calculer avec des puissances

Définition : puissance d'exposant positif

Soit a un nombre et soit n un nombre entier positif différent de 0.
Le nombre $\underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n \text{ fois}}$ est le nombre noté a^n. On dit « a puissance n » ou encore a exposant n.

Le nombre n est appelé **exposant**.

Exemples

- $5^2 = 5 \times 5 = 25$
- $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
- $(-2)^4 = -2 \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$
- $-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$
- $\left(\dfrac{4}{3}\right)^2 = \dfrac{4^2}{3^2} = \dfrac{16}{9}$
- $\dfrac{4^2}{3} = \dfrac{16}{3}$

Remarque

Les parenthèses sont importantes ! Il faut faire attention au résultat, qui peut changer suivant s'il y a des parenthèses ou non.

Propriétés

Soit a un nombre différent de 0. Soit n un nombre entier différent de 0.

- $a^0 = 1$
- $1^n = 1$
- $a^1 = a$
- $0^n = 0$

Règle de calcul

Dans une expression ,sans parenthèse, comportant des puissances, on effectue les calculs dans l'ordre suivant :

(1) Les calculs avec des puissances
(2) Les multiplications et/ou les divisions
(3) Les additions et/ou les soustractions

Exemples

- $$\begin{aligned} 1+3\times 2^4 &= 1+3\times 16 \\ &= 1+48 \\ &= 49 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} 6\times(5-3^2+2) &= 6\times(5-9+2) \\ &= 6\times(-4+2) \\ &= 6\times(-2) \\ &= -24 \end{aligned}$$

Propriétés : simplifications d'écritures

Soient a et b deux nombres différents de 0. Soient m et n deux nombres entiers relatifs :

(1) $a^n \times a^m = a^{n+m}$

(2) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^n \div a^m = a^{n-m}$

(3) $(a^n)^m = a^{n\times m}$

(4) $a^n \times b^n = (a\times b)^n$

(5) $\dfrac{a^n}{b^n} = a^n \div b^n = a^n \div b^n =$ $(a \div b)^n$

Exemples

(1) $2^4\times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$

(2) $\dfrac{6^5}{6^2} = 6^{5-2} = 6^3$

(3) $(10^3)^4 = 10^{3\times 4} = 10^{12}$

(4) $6^3\times 4^3 = (6\times 4)^3 = 24^3$

(5) $30^{20}\div 5^{20} = (30\div 5)^{20} = 6^{20}$