

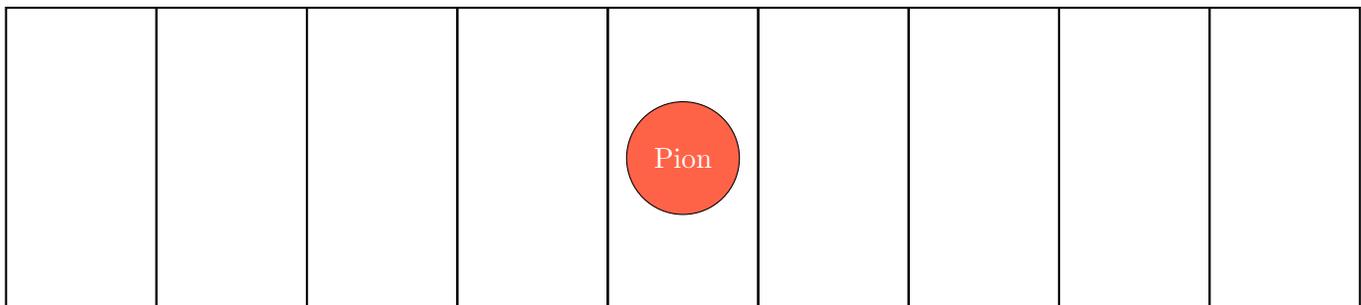
# Concentration, loi des grands nombres : approfondissement

## Marche aléatoire

Une **marche aléatoire** est une succession de pas réalisée indépendamment les uns des autres et de façon aléatoire.

### Exercice n°1

Un tapis de jeu est constitué de neuf cases juxtaposées. Un pion est placé sur la case centrale, il se déplace sur le tapis grâce au lancer d'une pièce : pile le pion se déplace d'une case à droite et face, il se déplace d'une case vers la gauche.



L'expérience consiste à effectuer quatre déplacements successifs du jeton.

1. Quelle est la probabilité que le pion termine sur la case la plus à gauche du tapis ?
2. Quelle est la probabilité que le pion termine sur la troisième case à droite du tapis ?
3. Quelle est la probabilité que le pion revienne sur la case de départ ?

On souhaite connaître, sur un grand nombre de répétitions, la probabilité que le pion revienne à la case centrale. Voici un programme Python qui permet de réaliser une fois les 4 déplacements aléatoires du pion :

```
1 from random import*
2 def marche_aleatoire():
3     position=0
4     for i in range(4):
5         position=position+(randint(0,1)*2-1)
6     return(position)
7 print(marche_aleatoire())
```

4. Modifier ce programme pour qu'il affiche la liste des positions finales du pion sur  $n$  lancers.
5. Modifier ce programme pour qu'il affiche la fréquence des positions centrales finales sur  $n$  lancers.

**> Correction des exercices****Exercice n°1**

On note les évènements suivants :

$G_1$  : « le pion est sur la première case à gauche du tapis »

$G_2$  : « le pion est sur la deuxième case à gauche du tapis »

$G_3$  : « le pion est sur la troisième case à gauche du tapis »

$G_4$  : « le pion est sur la quatrième case à gauche du tapis »

$D_1$  : « le pion est sur la première case à droite du tapis »

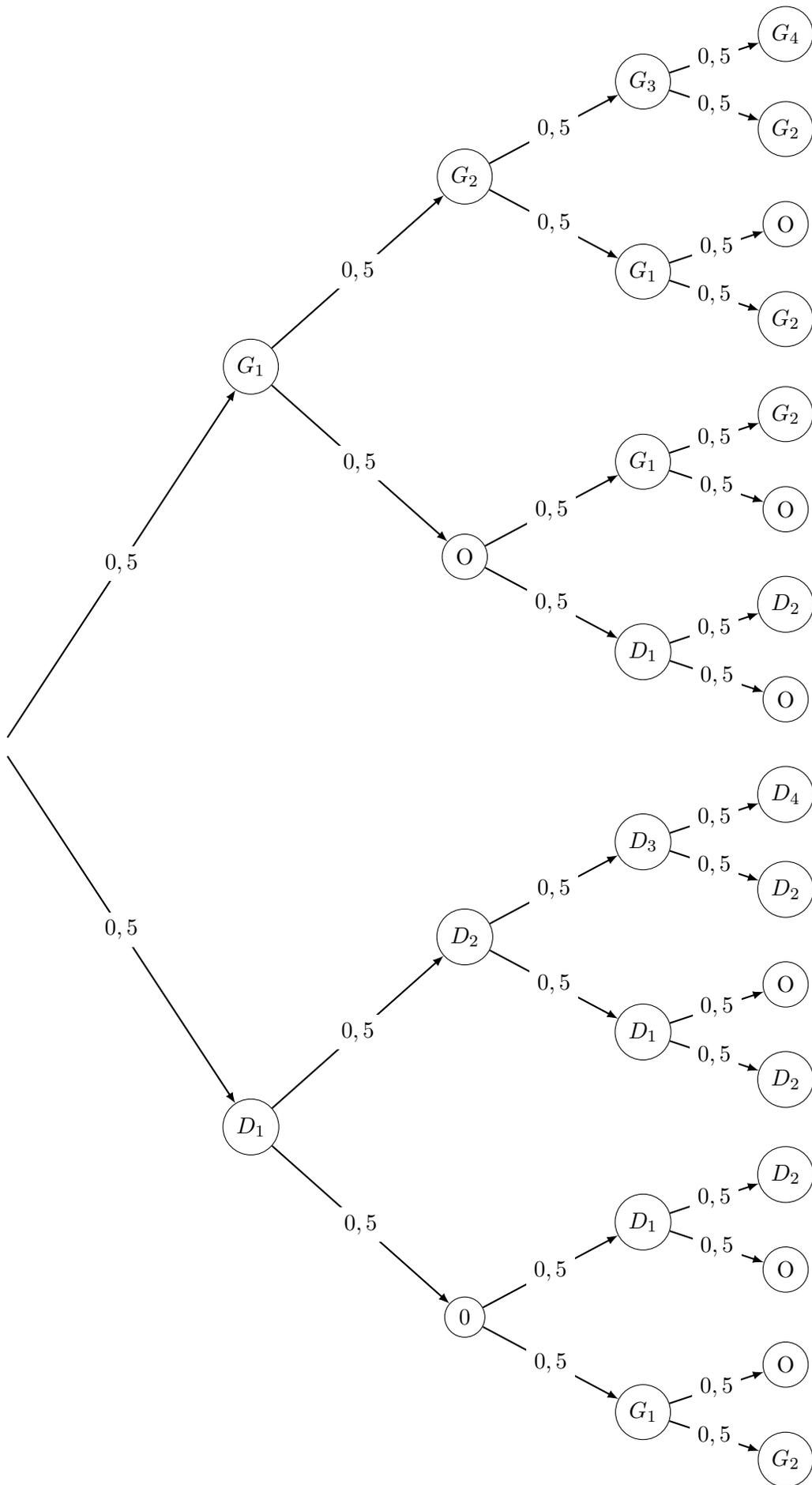
$D_2$  : « le pion est sur la deuxième case à droite du tapis »

$D_3$  : « le pion est sur la troisième case à droite du tapis »

$D_4$  : « le pion est sur la quatrième case à droite du tapis »

O : « Le pion est sur la case de départ »

On construit l'arbre pondéré suivant correspondant à une succession de 4 épreuves indépendantes (page suivante).



1.  $P(G_1 \cap G_2 \cap G_3 \cap G_4) = 0,5^4 = 0,0625$ .

La probabilité que le pion termine sur la case la plus à gauche est d'environ 6%.

2. Il est impossible que le pion termine sur la troisième case à droite du tapis. La probabilité est donc de 0.

3. Il y a six chemins menant à la case initiale.

Chaque chemin a la même probabilité de se réaliser :  $0,5^4$ .

Ainsi :  $P(O) = 4 \times 0,5^4 = 0,25$ .

Il y a donc 25% de chance que le pion termine sur la case de départ après la marche aléatoire de 4 pas.

4. Voici le programme Python modifié :

```
1 from random import*
2 def marche_aleatoire():
3     position=0
4     for i in range(4):
5         position=position+(randint(0,1)*2-1)
6     return(position)
7
8 def liste(n):
9     liste_position=[]
10    for j in range(n):
11        liste_position.append(marche_aleatoire())
12    return liste_position
```

```
>>> print(liste(10))
```

```
>>> [-2, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -2]
```

5. Voici le programme Python modifié :

```
1 from random import*
2 def marche_aleatoire(n):
3     position=0
4     compteur=0
5     for j in range(n):
6         for i in range(4):
7             position=position+(randint(0,1)*2-1)
8             if position==0 :
9                 compteur=compteur+1
10    return (compteur/n)
```

```
>>> print(marche_aleatoire(100000))
```

```
>>> 0.036
```