Correction sur la dérivation : cas local

> Taux d'accroissement et nombre dérivé

Exercice n°1

1. Soit $h \in \mathbb{R}$. Déterminons le taux d'accroissement de f en 3.

   $$\tau(h) = \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{3(3+h)-1-(3\times 3-1)}{h} = \frac{3h}{h} = 3.$$

   La limite de ce taux d'accroissement quand h tend vers 0 est de 3. Donc f est bien dérivable en 3 et $f'(3) = 3$.

2. Soit $h \in \mathbb{R}$. Déterminons le taux d'accroissement de f en 2.

   $$\tau(h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2+2+h-1-(2^2+2-1)}{h} = \frac{h^2+5h}{h} = \frac{h(h+5)}{h} = h+5.$$

   $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h\to 0} h+5 = 5$. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 5$.

3. Soit $h \in \mathbb{R}^*$. Déterminons le taux d'accroissement de f en -1.

   $$\tau(h) = \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{\frac{1}{-1+h}-\frac{1}{-1}}{h} = \frac{\frac{1}{h-1}+1}{h} = \frac{\frac{h}{h-1}}{h} = \frac{1}{h-1}$$

   $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h-1} = -1$. Donc f est dérivable en -1 et $f'(-1) = -1$.

4. Soit h un réel différent de 2. Déterminons le taux d'accroissement de f en 4.

   $$\tau(h) = \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{\frac{1}{2+4+h}-\frac{1}{2+4}}{h} = \frac{\frac{1}{6+h}-\frac{1}{6}}{h} = \frac{\frac{6-(6+h)}{6(6+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{6(6+h)}}{h} = \frac{-1}{6(6+h)}$$

   $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-1}{6(6+h)} = -\frac{1}{36}$. Donc f est dérivable en 4 et $f'(4) = -\frac{1}{36}$.

5. Soit $h \in \mathbb{R}$. Déterminons le taux d'accroissement de f en 5.

   $$\tau(h) = \frac{f(5+h)-f(5)}{h} = \frac{-2(5+h)^2+3-(-2\times 5^2+3)}{h} = \frac{-h^2-20h}{h} = -h-20$$

   $\lim\limits_{h\to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h\to 0} -h-20 = -20$. Donc f est dérivable en 5 et $f'(5) = -20$.

Exercice n°2

1. $f'(3)$ est le coefficient directeur de la droite formée par les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 3 et $3 + h$ où h est un réel qui tend vers 0.
2. Graphiquement, $f'(3)$ vaut 2,5.
3. Graphiquement, $f'(-5)$ vaut 2. Graphiquement, $f'(-2,3)$ vaut 0. Enfin, graphiquement, $f'(0)$ vaut -1,5.

Exercice n°3

Graphiquement, on trouve : $f'(2) = -2$, $f'(4) = 0$ et $f'(6) = 2$.

Exercice n°4

1. $f(0) = -5 \times 0^2 + 7 \times 0 + 1 = 1$. La plateforme est haute de 1 m.

2. On doit chercher le maximum de la fonction f. Puisque c'est un trinôme du second degré avec $a = -5$, $b = 7$ et $c = 1$, ce maximum est atteint en $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{-7}{2 \times (-5)} = 0,7$.

   Puis $f(0,7) = -5 \times 0,7^2 + 7 \times 0,7 + 1 = 3,45$. La hauteur maximale du ballon est donc de 3,45 m atteint au bout de 0,7 seconde.

3. $\tau(h) = \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} = \dfrac{-5(t+h)^2 + 7(t+h) + 1 - (-5t^2 + 7t + 1)}{h} = \dfrac{-10th - 5h^2 + 7h}{h} = -10t - 5h + 7.$

   A $t = 0$, la vitesse instantanée du ballon est de 7 m/s.

4. La hauteur maximale est atteinte au bout de $t =$ 0,7 seconde.
   $-10 \times 0,7 - 5h + 7 = -5h$. Cette valeur tend vers 0 quand h tend vers 0. Ainsi, la vitesse instantanée du ballon quand il atteint sa hauteur maximale est de 0 m/s.

Exercice n°5

Pour que $f'(a) = 0$, il faut que le coefficient directeur de la droite avec laquelle nous travaillons soit égal à 0. Il nous faut donc une droite parallèle à l'axe des abscisses.
C'est le cas en $a = 0,75$ et en $a = 6$ (valeurs approximatives déterminées graphiquement).

Exercice n°6

1. Soit $h \in \mathbb{R}$. Déterminons le taux d'accroissement de f en 2.

   $$\tau(h) = \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - (2^2 + 2 \times 2 - 3)}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h.$$

   $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} 6 + h = 6$. Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 6$.

2. La fonction racine carrée n'est pas définie en -1 sur $\mathbb{R}$. On ne peut donc pas déterminer $f(-1) = \sqrt{-1}$.

3. Soit $h \in \mathbb{R}$. Déterminons le taux d'accroissement de f en 1.

$$\begin{aligned}\tau(h) &= \frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\ &= \frac{\sqrt{1+h}-\sqrt{1}}{h}\\ &= \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}\\ &= \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+\sqrt{1})}{h(\sqrt{1+h}+1)}\\ &= \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)}\\ &= \frac{h}{h(\sqrt{1+h}+1)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+h}+1}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+h}+1} = \dfrac{1}{2}$. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

> Nombre dérivé et tangente

Exercice n°7

1. La pente de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 3 est la valeur $f'(3)$. Soit $h \in \mathbb{R}$.

$$\tau(h) = \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{-4(3+h)^2+6(3+h)-1-(-4\times 3^2+6\times 3-1)}{h} = \frac{-4h^2-18h}{h} = -4h-18.$$

$\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} -4h-18 = -18$. On a donc $f'(3) = -18$ qui est ainsi la valeur de la pente recherchée.

2. Là encore, on doit déterminer $f'(4)$.

$$\tau(h) = \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(4+h)^2-4^2}{h} = \frac{8h+h^2}{h} = 8+h.$$

$\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} 8+h = 8$. On a donc $f'(4) = 8$ qui est ainsi la valeur du coefficient directeur recherché.

3. On doit déterminer $f'(0)$.

$$\tau(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(0+h)^2+3\times(0+h)-(0^2+3\times 0)}{h} = \frac{h^2+3h}{h} = h+3.$$

$\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} h+3 = 3$. Donc $f'(0) = 3$ qui est la valeur de la pente recherchée.

Exercice n°8

1. Une équation de la tangente est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ où f est ici la fonction carrée et $a = 2$.

   $f(2) = 2^2 = 4$.

   $\tau(h) = \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \dfrac{4h + h^2}{h} = 4 + h$.

   $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} 4 + h = 4$. L'équation de la tangente à la fonction carrée au point d'abscisse 2 est donc $y = 4(x-2) + 4$.

2. Une équation de la tangente est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ où f est ici la fonction inverse et $a = 1$.

   $f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.

   $\tau(h) = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\frac{1}{h+1} - \frac{1}{1}}{h} = \dfrac{\frac{1-(h+1)}{h+1}}{h} = \dfrac{-1}{h+1}$

   $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{h+1} = -1$. L'équation de la tangente à la fonction inverse au point d'abscisse 1 est donc $y = -(x-1) + 1$.

3. Une équation de la tangente est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ où f est ici la fonction racine carrée et $a = 4$.

   $f(4) = \sqrt{4} = 2$.

   $\tau(h) = \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} = \dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \dfrac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \dfrac{h}{h\sqrt{4+h}} = \dfrac{1}{\sqrt{4+h}}$

   $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{4+h}} = \dfrac{1}{4}$. L'équation de la tangente à la fonction racine carrée au point d'abscisse 4 est donc $y = \dfrac{1}{4}(x-4) + 2$.

4. Une équation de la tangente est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ où f est ici définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 6$ et $a = 7$.

   $f(7) = -2 \times 7^3 + 4 \times 7^2 - 6 = -496$.

   L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ est donc $y = -238(x-7) - 496$.

Exercice n°9

1. $f(-1) = \dfrac{(-1)^2 + (-1) - 1}{(-1)^2 + 1} = -\dfrac{1}{2}$. La point A appartient bien à $\mathcal{C}_f$.

2. Déterminons $f'(-1)$:

$$\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\
&= \frac{\dfrac{(-1+h)^2 + (-1+h) - 1}{(-1+h)^2 + (-1)} - \dfrac{(-1)^2 + 1 - 1}{(-1)^2 + 1}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{h^2 - h - 1}{h^2 - 2h + 2} + \dfrac{1}{2}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{3h^2 - 4h}{2(h^2 - 2h + 2)}}{h} \\
&= \frac{3h - 4}{2(h^2 - 2h + 2)}
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h \to 0} 2(h^2 - 2h + 2) = 4$ et $\lim\limits_{h \to 0} 3h - 4 = -4$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = -1$. Ainsi, $f'(-1) = -1$.

Une équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A est donc $y = -(x - (-1)) - \dfrac{1}{2} =$ ou encore $y = -x - \dfrac{3}{2}$.

3. $$\begin{aligned}
f(x) - \left(-x - \frac{3}{2}\right) &= \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1} + x + \frac{3}{2} \\
&= \frac{2(x^2 + x - 1) + 2x(x^2 + 1) + 3(x^2 + 1)}{2(x^2 + 1)} \\
&= \frac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{2x^2 + 2)}
\end{aligned}$$

Et $\dfrac{(x+1)^2(2x+1)}{2x^2 + 2} = \dfrac{2x^2 + 5x^2 + 4x + 1}{2x^2 + 2}$. Les deux expressions sont donc égales.

4. Le dénominateur est tout le temps strictement positif sur $\mathbb{R}$ tout comme $(x+1)^2$.

Le signe du quotient dépend donc $2x + 1$. Or $2x + 1$ est négatif sur $\left]-\infty\,;\ -\dfrac{1}{2}\right]$ puis positif sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\ +\infty\right[$.

Cela signifie que la tangente est en dessous de $\mathcal{C}_f$ sur $\left]-\infty\,;\ -\dfrac{1}{2}\right]$ puis au-dessus de $\mathcal{C}_f$ $\left[-\dfrac{1}{2}\,;\ +\infty\right[$.