

Correction des exercices sur les nombres complexes (4)

> Etudier des configurations du plan

Exercice n°1

- $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = \frac{4 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}) - (4 - \sqrt{3}i)}{2\sqrt{3} - 1 - (-1 + 2i)} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2\sqrt{3} - 2i} = \frac{-\sqrt{3} + i}{-2(-\sqrt{3} + 1)} = -\frac{1}{2}.$
- Puisque $\frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice n°2

- $AB = |z_B - z_A| = |1 - 2i - (-2 - i)| = |3 - i| = \sqrt{10}$
 $AC = |z_C - z_A| = |-1 + 2i - (-2 - i)| = |1 + 3i| = \sqrt{10}.$

On a donc $AB = AC$: le triangle ABC est isocèle en A.

- $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right).$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + 3i}{3 - i} = \frac{(1 + 3i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + i + 9i - 3}{9 + 1} = \frac{10i}{10} = i.$$

Or $\arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. L'angle $\widehat{BAC}$ est donc un angle droit : ABC est un triangle rectangle B.

Exercice n°3

- $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{2i\sqrt{3} - (3 + i\sqrt{3})}{2 - (3 + i\sqrt{3})} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{-1 - i\sqrt{3}} = \frac{(-3 + i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})}{(-1 - i\sqrt{3})(-1 + i\sqrt{3})} = -\frac{4i\sqrt{3}}{4} = -\sqrt{3}i.$

$$\arg(-\sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{2} \text{ donc } \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}.$$

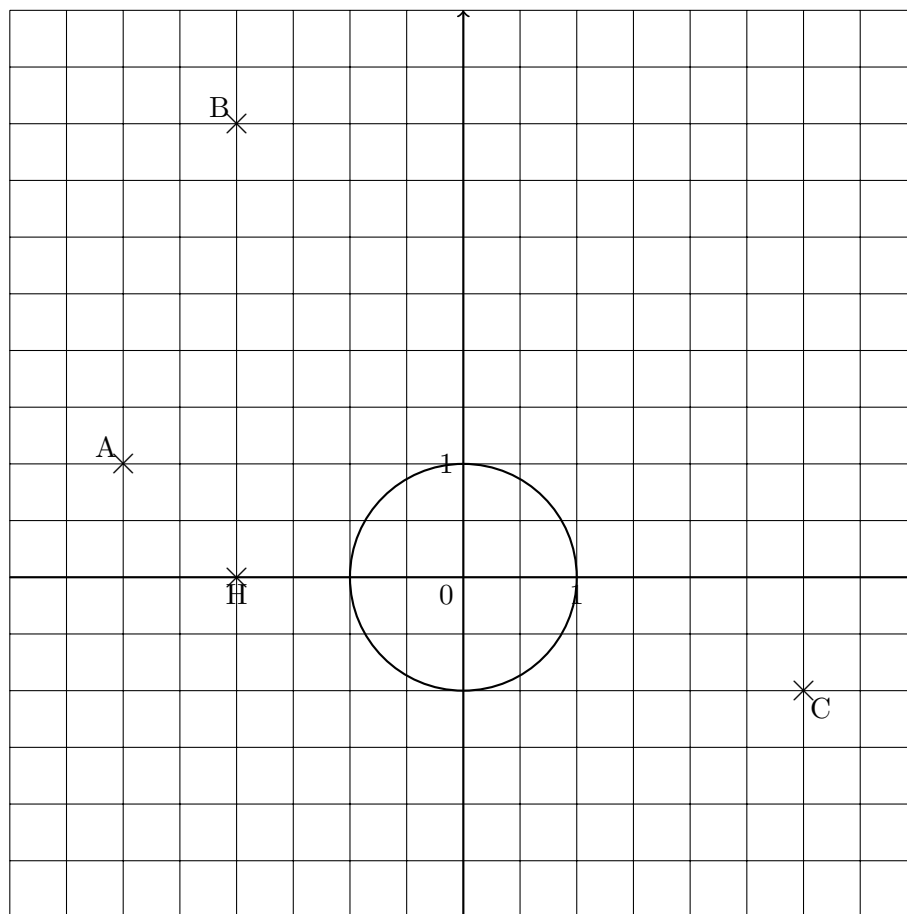
- D'après la question précédente, le triangle ABC est rectangle en B.

Le cercle circonscrit à ABC a pour centre le milieu du segment [AC]. L'affixe de ce milieu est :

$$\omega = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}.$$

Exercice n°4

- Placement des quatre points :



$$2. JA = |-3 - i - i| = |-3 - 2i| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

$$JB = |-2 + 4i - i| = |-2 + 3i| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

$$JC = |3 - i - i| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}.$$

Ainsi, les points A, B et C appartiennent au même cercle de centre J et de rayon $\sqrt{13}$.

$$3. \frac{b-c}{h-a} = \frac{-2+4i-(3-i)}{-2-(-3-i)} = \frac{-5+5i}{1+i} = \frac{(-5+5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-5+5i+5i-5i^2}{1^2+1^2} = \frac{10i}{2} = 5i.$$

Or $\arg(5i) = \frac{\pi}{2}$: les droites (AH) et (BC) sont donc perpendiculaires.

Exercice n°5

1. Soit A le point d'affixe $2i$.

$|z - 2i| = 3$ s'écrit alors $AM = 3$.

L'ensemble recherché est donc les points M tels que $AM = 3$, qui est un cercle de centre A($2i$) et de rayon 3.

$$2. |\bar{z} - 3 + i| = |\overline{\bar{z} - 3 + i}| = |\bar{\bar{z}} - 3 - i| = |z - 3 - i| = |z - (3 + i)|$$

Soit A le point d'affixe $3 + i$ et soit B le point d'affixe 5.

L'égalité $|\bar{z} - 3 + i| = |z - 5|$ revient alors à $AM = BM$. L'ensemble des points M recherché est donc la médiatrice du segment [AB].

3. L'égalité revient à $|z - i| = 2|z|$ que l'on peut aussi écrire $|z - i|^2 = 4|z|^2$.

Posons $z = x + iy$. L'équation revient à :

$$\begin{aligned} |z + iy - i|^2 &= 4|x + iy|^2 \\ \Leftrightarrow |x + i(y - 1)|^2 &= 4|x + iy|^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 &= 4(x^2 + y^2) \\ \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2y &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 &= \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Il s'agit du cercle de centre $\left(0; -\frac{1}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2}{3}$.

> Etudier les racines de l'unité

Exercice n°6

- $z^4 - 1 = (z^2)^2 - 1^2 = (z^2 + 1)(z^2 - 1) = (z + i)(z - i)(z + 1)(z - 1)$.
- Les solutions de $z^4 - 1 = 0$ sont donc $1; -1; i$ et $-i$, qui sont les éléments de l'ensemble $\mathbb{U}_4$.

Exercice n°7

- Les images des racines 5-ième de l'unité sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.
- Notons w_0 et w_1 les deux sommets de ce pentagone tels que $w_0 = 1$ et $w_1 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

$$|w_1 - w_0| = \left|e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1\right| = \left|e^{i\frac{2\pi}{10}}\right| \times \left|e^{i\frac{2\pi}{10}} - e^{-i\frac{2\pi}{10}}\right| = \left|e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{-i\frac{\pi}{5}}\right|.$$

On applique ensuite la formule d'Euler :

$$|w_1 - w_0| = \left|2i \times \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| = 2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

- Puisqu'un pentagone régulier possède ses cinq côtés de même longueur, son périmètre vaut $5b \times 2 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ soit $10 \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.